Niveau(x) d'enseignement : 4 Numéro EDUQ : 9270277
Centre d'intérêt : 841

Mathématique : option 2 / Direction générale des programmes, Direction de la formation générale -- [Québec] : La Direction générale, 1989, c1987
381 p. : ill. ; 22 x 28 cm. -- (Guide pédagogique / Ministère de l'éducation du Québec, Direction générale des programmes. Secondaire)

Version anglaise publ. sous le titre : Mathematics : option II. Code 9091-4045; 16-3304-01A. Code : 16-3304-01; 3869-1326

ISBN 2-550-13707-8

Vedette(s)-secondaire(s) : Québec (Province). Ministère de l'éducation. Direction de la formation générale • Québec (Province). Ministère de l'éducation. Direction générale des programmes

Descripteur(s) : Mathématiques • Guide pédagogique • Secondaire (Ordre d'enseignement)

Ce guide, associé au programme d'études en mathématique au secondaire, option II, se veut un document de support pédagogique à caractère indicatif. Le guide se présente en deux parties. La première donne des suggestions d'apprentissage correspondant à chaque objectif terminal afin d'illustrer une démarche de résolution de problèmes. Ces situations traitent de l'ensemble des objectifs terminaux et intermédiaires. Les commentaires précisent la démarche suggérée et les consignes que les élèves doivent respecter selon la situation donnée. La deuxième partie précise chaque objectif intermédiaire du programme. De plus, le tableau suivant est inclus au début de cette partie: "Liste des objectifs de l'option II qui sont nécessaires pour satisfaire aux exigences de l'ordre collégial relatives aux préalables mathématiques".

Type de document :

guide pédagogique

SECONDAIRE

MATHÉMATIQUE

OPTION 2

Québec

1270277

guide pédagogique

SECONDAIRE

MATHÉMATIQUE
OPTION 2

Direction générale des programmes
Direction de la formation générale

Premier tirage: août 1986
Deuxième tirage: février 1989

Approuvé par les Comités protestant et catholique
du Conseil supérieur de l'éducation
les 19 septembre, 6 et 7 novembre 1986

© Gouvernement du Québec
Ministère de l'Éducation, 1987

ISBN 2-550-13707-8

Dépôt légal — deuxième trimestre 1987
Bibliothèque nationale du Québec

Pour éviter d'alourdir le texte, nous nous conformons dans le présent document à la règle de grammaire qui permet d'utiliser le masculin avec une valeur de neutre, lorsqu'on parle d'une manière générale. Par exemple, il est bien clair que, lorsqu'on parle de l'"enseignant", ce masculin inclut un enseignant de l'un ou de l'autre sexe.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction 1

2. Notes pédagogiques (situations d'apprentissage) 5

- Objectif général 1 7

- Objectif terminal 1.1 9
- Objectif terminal 1.2 23
- Objectif terminal 1.3 29

- Objectif général 2 35

- Objectifs terminaux 2.1 et 2.2 37
- Objectif terminal 2.3 69

- Objectif général 3 135
- Objectif terminal 3.1 137
- Objectif terminal 3.2 141
- Objectif terminal 3.3 153

3. Contenu notionnel 169

- Tableau des objectifs préalables à l'ordre collégial 171

- Objectif général 1 173
  - Objectif terminal 1.1 177
  - Objectif terminal 1.2 211
  - Objectif terminal 1.3 227

- Objectif général 2 237
  - Objectif terminal 2.1 241
  - Objectif terminal 2.2 269
  - Objectif terminal 2.3 285

- Objectif général 3 313
  - Objectif terminal 3.1 317
  - Objectif terminal 3.2 325
  - Objectif terminal 3.3 331

Annexe: Notes historiques sur la trigonométrie 355

COORDONNATEUR*

M. André Fournier	Responsable de la mathématique, Direction de la formation générale, Direction générale des programmes, Ministère de l'Éducation

RÉDACTEURS*

M. André Davidson	Conseiller pédagogique, C.S.R. Vieilles-Forges, Trois-Rivières
M. Denis De Champlain	Conseiller pédagogique, C.S. Beauport, Beauport
M. Pierre Mathieu	Conseiller pédagogique, C.S.R. Yamaska, Saint-Hyacinthe
M. René Parenteau	Enseignant, C.S.R. Vieilles-Forges, Trois-Rivières
M. Jules Rollin	Enseignant, C.S. Saint-Jérôme, Saint-Jérôme

CONSULTANT*

M. Jean B. Vetileux	Conseiller pédagogique, C.S.R. de Chambly, Saint-Lambert

---

* Ces personnes exerçaient les fonctions mentionnées pendant l'année scolaire 1985-1986.

1

INTRODUCTION

Ce guide pédagogique est associé au programme d'études en mathématique au secondaire, option II (document 16-3304). Son contenu n'est pas prescriptif et il constitue un document de support pédagogique à caractère indicatif:

> "Son intention générale est de promouvoir une bonne compréhension du programme, de suggérer aux enseignants des approches pédagogiques, des situations éducatives et des situations d'apprentissage jugées appropriées pour une bonne application du programme. Il vise aussi à susciter la créativité dans la recherche des moyens pédagogiques à mettre en oeuvre[1]."

Ce guide contient des commentaires sur chacun des objectifs généraux, terminaux et intermédiaires. Ils ont pour objectif d'en définir les limites, d'indiquer des tendances et de proposer des stratégies. Ils tentent de respecter les finalités, les valeurs et les buts de l'éducation, de même que les principes directeurs du programme, et de présenter l'approche pédagogique préconisée par ce dernier.

Le développement de la technologie amène l'enseignant à modifier sa méthodologie, afin d'exploiter de façon rationnelle et plus efficace les possibilités de la calculatrice et de l'ordinateur.

Même si ce guide présente des situations d'apprentissage, il n'est pas une préparation de classe. Elles ne peuvent être transmises aux élèves qu'après une adaptation, ce qui implique une planification intermédiaire et un plan de cours.

Dans ce guide, nous présentons:

1. des situations d'apprentissage, des commentaires se rapportant à ces situations et les objectifs du programme qu'elles couvrent.

Situations d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

1. S.G.O.P., Cadre relatif à l'élaboration des programmes et des guides pédagogiques, p. 19.

2. la description de chacun des objectifs intermédiaires.

Objectifs intermédiaires	Commentaires

La première partie donne des suggestions de situations d'apprentissage correspondant à chaque objectif terminal, afin d'illustrer une démarche de résolution de problèmes. Ces situations traitent de l'ensemble des objectifs terminaux et intermédiaires. Les commentaires précisent la démarche suggérée et les consignes que les élèves doivent respecter selon la situation donnée. La dernière colonne spécifie les objectifs intermédiaires normalement atteints.

La deuxième partie précise chaque objectif intermédiaire du programme. De plus, au début de cette partie, nous incluons le tableau suivant: - liste des objectifs de l'option II (534) qui sont nécessaires pour satisfaire aux exigences de l'ordre collégial relatives aux préalables mathématiques. Dans ce document, tous les autres objectifs sont identifiés à l'aide du code 531 .

Les situations d'apprentissage doivent permettre à l'élève d'acquérir des attitudes positives vis-à-vis de la mathématique ainsi que des habiletés à résoudre des problèmes. Elles doivent aussi lui permettre de construire ses connaissances et rendre les apprentissages signifiants. S'il n'est pas possible d'intégrer à la situation les préalables qui demandent à être travaillés, nous suggérons de les présenter à l'aide d'une autre situation et cela dans le but de leur donner un sens:

> "C'est par le biais de mises en situation réalistes et variées que l'enseignant devra introduire, autant que possible, les divers concepts mathématiques de ce programme. Les principes méthodologiques retenus devront inspirer l'enseignement de telle sorte que l'élève devienne l'élément moteur de son apprentissage grâce à une participation active. Il doit apprendre à utiliser la mathématique comme un outil puissant qui lui permet d'interpréter le réel. Ainsi, ses connaissances mathématiques doivent être exploitées pour qu'il élabore des modèles mathématiques qui collent à des situations concrètes; pour qu'il transforme ou effectue des opérations sur ces modèles; et pour qu'il interprète correctement les résultats obtenus afin de voir sous un angle nouveau les situations concrètes qui lui étaient présentées'."[1]

---

1. Programme d'études, Secondaire, Mathématique, Option II, 1984, p. 13 (Document 16-3304).

NOTES PÉDAGOGIQUES

OBJECTIF GÉNÉRAL

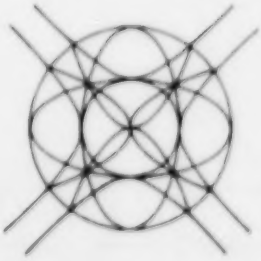
N°: 1

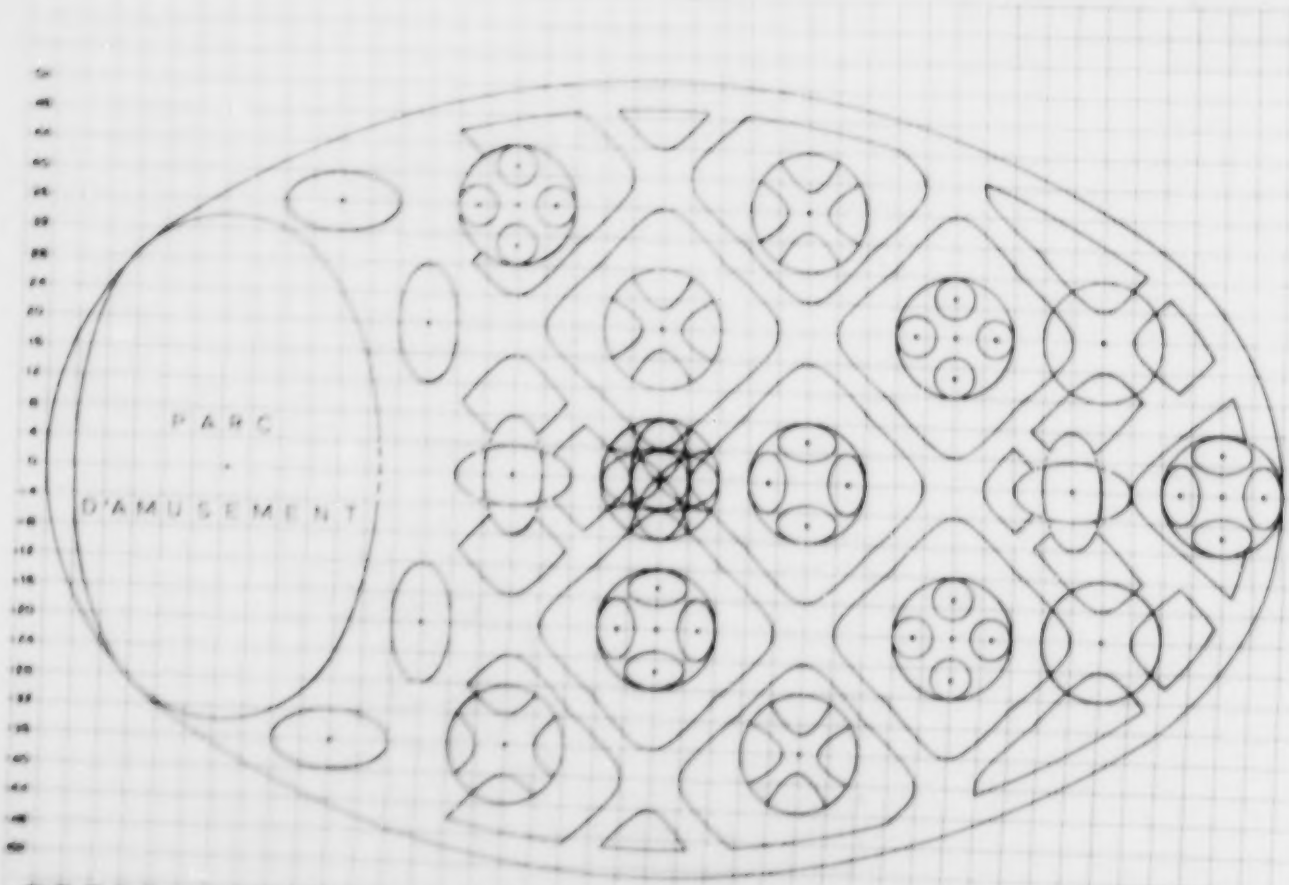
FAVORISER chez l'élève une meilleure interprétation du réel à partir des relations binaires.

Thème: • Lieux géométriques
• Relations

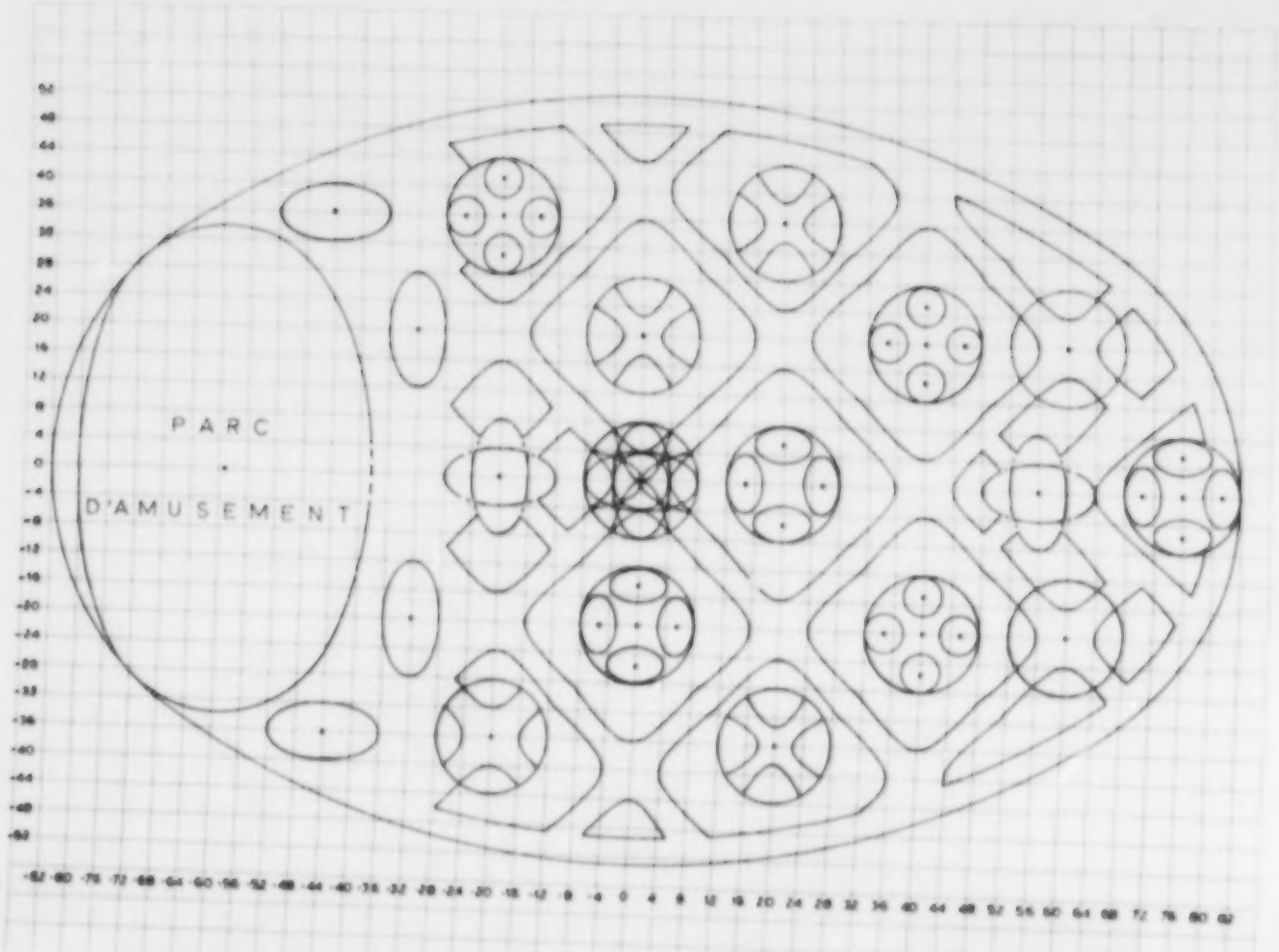
Durée: 20% du temps

OBJECTIF TERMINAL N° : 1.1 RÉSOUDRE des problèmes utilisant des lieux géométriques associés aux relations du second degré dans le plan cartésien.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
LICONEX Tu travailles comme graphiste pour une firme qui a décidé de présenter un projet intitulé LICONEX. Il consiste à élaborer les plans d'une île qui servira de lieu de rassemblement pour plusieurs types d'activités (genre Terre des hommes). Le président de la compagnie veut que tout ce qu'il y aura sur l'île prenne la forme d'une conique.	Ce projet provient d'une demande du gouvernement provincial qui désire diminuer le taux de chômage et augmenter le tourisme au Québec. L'île pourrait servir à des expositions de tous genres, des conventions locales et mondiales, des congrès, des jeux olympiques, etc. Il faut aussi prévoir un endroit pour un parc d'amusement et ne pas oublier toutes les installations liées à ces diverses activités. Le titre du projet LICONEX vient de l'idée du président, qui insiste pour avoir des formes coniques sur toute l'île (L'Ile CONique des Expositions). On vous présente à la page suivante une île type comme exemple, afin de vous guider dans votre création. On a choisi comme symbole de l'île le dessin de droite, qui comprend des paraboles, des cercles, des ellipses et des hyperboles. La majorité des visiteurs arrivent à l'île par un moyen de transport souterrain (métro) dont la sortie est située au centre de l'île. Ce centre est identifié par l'origine des coordonnées cartésiennes du plan qui couvre l'île. 	


PARC
D'AMUSEMENT

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
1. En examinant le symbole de l'île dont le centre est à l'origine, tu remarques qu'il possède quatre paraboles. Identifie sur l'île, en nommant les coordonnées du centre des pavillons, des paraboles translatées.	Les élèves ont vu en option I les notions concernant la parabole dont le sommet est à l'origine (objectifs 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4 et 3.3.5). Ils peuvent donc répondre à la question de l'activité 1. Ils ne connaissent pas la différence entre une parabole et une hyperbole. Il faut donc insister sur la forme de la parabole. Avant de réaliser l'activité 2, montrer aux élèves les autres coniques en spécifiant leurs noms: Cercle Ellipse Hyperbole 	
2. Identifie sur l'île, en nommant les coordonnées du centre de la conique, des cercles, des ellipses et des hyperboles.	Cette activité est une introduction aux différentes coniques, et on ne se préoccupe pas, pour le moment, des notions ou des définitions qui s'y rapportent.	
3. a) Comme graphiste on te demande de choisir une des paraboles dont le sommet est à l'origine et de la translater dans le parc d'amusement.	Les élèves connaissent les notions nécessaires pour réaliser cette activité (voir la section du contenu, objectif 1.1.1).	1.1.1 Étant donné une parabole dont le sommet est à l'origine, TRACER son image par une translation et


PARC
D'AMUSEMENT

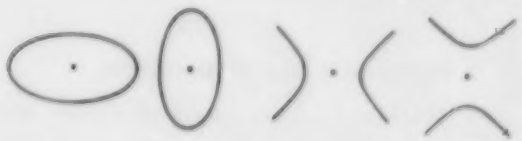
tuation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
En examinant le symbole de l'île dont le centre est à l'origine, tu remarques qu'il possède quatre paraboles. Identifie sur l'île, en nommant les coordonnées du centre des pavillons, des paraboles translatées.	Les élèves ont vu en option I les notions concernant la parabole dont le sommet est à l'origine (objectifs 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4 et 3.3.5). Ils peuvent donc répondre à la question de l'activité 1. Ils ne connaissent pas la différence entre une parabole et une hyperbole. Il faut donc insister sur la forme de la parabole. Avant de réaliser l'activité 2, montrer aux élèves les autres coniques en spécifiant leurs noms: Cercle Ellipse Hyperbole 	
Identifie sur l'île, en nommant les coordonnées du centre de la conique, des cercles, des ellipses et des hyperboles.	Cette activité est une introduction aux différentes coniques, et on ne se préoccupe pas, pour le moment, des notions ou des définitions qui s'y rapportent.	
a) Comme graphiste on te demande de choisir une des paraboles dont le sommet est à l'origine et de la translater dans le parc d'amusement.	Les élèves connaissent les notions nécessaires pour réaliser cette activité (voir la section du contenu, objectif 1.1.1).	1.1.1 Étant donné une parabole dont le sommet est à l'origine, TRACER son image par une translation et

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
b) Fais de même pour un cercle, une ellipse et une hyperbole.	La seule nouveauté ici est la forme des courbes à translater (cercle, ellipse, hyperbole).	1.1.2 Étant donné un cercle, une ellipse ou une hyperbole centrés à l'origine, TRACER leur image par une translation.
4. Trouve l'équation de l'image de la parabole translatée en 3 a).	Une suggestion aux élèves pour les guider pourrait être de partir d'une translation d'une droite (déjà vue) et de suivre la même démarche pour la parabole choisie. Si la parabole choisie est de la forme $y^2 = 4ax$, ils doivent arriver à la forme $(y - k)^2 = 4a(x - h)$ pour la parabole translatée. Si la parabole choisie est de la forme $x^2 = 4ay$, ils doivent arriver à la forme $(x - h)^2 = 4a(y - k)$ pour la parabole translatée.	1.1.3 Étant donné une parabole dont le sommet est à l'origine, TROUVER l'équation de son image par une translation.
5. a) Quelles sont les équations des paraboles du symbole de l'île, sachant que leurs sommets passent par l'origine et que les coordonnées de leurs foyers sont (0, 1) et (1, 0)?	L'objectif 3.3.1 de l'option I couvre cette notion. Il n'y a donc rien de neuf pour les élèves.	1.1.4 Étant donné les coordonnées du sommet et du foyer d'une parabole, TROUVER l'équation associée à son lieu et vice versa.
b) Quelle est l'équation associée à la parabole dont le sommet est (20, 38) et dont les coordonnées du foyer sont (20, 39)?	La notion nécessaire pour résoudre l'activité de gauche est: "la définition de la parabole", qu'on applique plus d'une fois, et un graphique pour comprendre ce qu'il faut faire. Une démarche est expliquée dans la section du contenu, à l'objectif 1.1.4.	

tuation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
c) Quelle est l'équation associée à la parabole dont le sommet est (-2, 20) et dont les coordonnées du foyer sont (-3, 20)?	Les élèves devraient découvrir les formes: $(y - k)^2 = 4a(x - h)$ $(x - h)^2 = 4a(y - k)$ en plus de: $x = Ay^2 + By + C$ $y = Ax^2 + Bx + C$	
Trouve les coordonnées des sommets et des foyers des paraboles associées à: $4y = x^2 - 40x + 264$ $4x = y^2 - 40y + 400$	Une première étape consiste à transformer l'équation donnée sous sa forme canonique puisqu'elle permet d'identifier immédiatement le sommet et la distance entre le foyer et le sommet. En plus, la forme de l'équation canonique permet de déterminer l'équation de l'axe de symétrie de la parabole.	
Trouve les équations des axes de symétrie et des directrices des paraboles associées aux équations: $4y = x^2 - 40x + 264$ $4x = y^2 - 40y + 400$ [no 6]	Ils ont vu, à l'objectif 3.3.2 de l'option I, les équations de l'axe de symétrie et de la directrice lorsque le sommet de la parabole est à l'origine. Il n'y a qu'un pas à faire pour qu'ils découvrent que, si l'équation de la parabole est de la forme: $(x - h)^2 = 4a(y - k)$ ou $(y - k)^2 = 4a(x - h)$, l'équation de l'axe de symétrie aura la forme: $x = h$ $y = k$ et l'équation de la directrice aura la forme: $y = k - a$ $x = h - a$ Les situations d'apprentissage traiteront toujours des cas centrés à l'origine pour déboucher sur les autres, puisque le cercle, l'ellipse et l'hyperbole sont devenus des objectifs facultatifs pour l'option I; nous devons donc les voir en option II.	1.1.6 TROUVER l'équation de l'axe de symétrie ou de la directrice d'une parabole donnée.

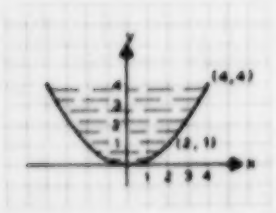
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
b) Fais de même pour un cercle, une ellipse et une hyperbole.	La seule nouveauté ici est la forme des courbes à translater (cercle, ellipse, hyperbole).	1.1.2 Étant donné un cercle, une ellipse ou une hyperbole centrés à l'origine, TRACER leur image par une translation.
4. Trouve l'équation de l'image de la parabole translatée en 3 a).	Une suggestion aux élèves pour les guider pourrait être de partir d'une translation d'une droite (déjà vue) et de suivre la même démarche pour la parabole choisie. Si la parabole choisie est de la forme $y^2 = 4ax$, ils doivent arriver à la forme $(y - k)^2 = 4a(x - h)$ pour la parabole translatée. Si la parabole choisie est de la forme $x^2 = 4ay$, ils doivent arriver à la forme $(x - h)^2 = 4a(y - k)$ pour la parabole translatée.	1.1.3 Étant donné une parabole dont le sommet est à l'origine, TROUVER l'équation de son image par une translation.
5. a) Quelles sont les équations des paraboles du symbole de l'île, sachant que leurs sommets passent par l'origine et que les coordonnées de leurs foyers sont (0, 1) et (1, 0)? b) Quelle est l'équation associée à la parabole dont le sommet est (20, 38) et dont les coordonnées du foyer sont (20, 39)?	L'objectif 3.3.1 de l'option I couvre cette notion. Il n'y a donc rien de neuf pour les élèves. La notion nécessaire pour résoudre l'activité de gauche est: "la définition de la parabole", qu'on applique plus d'une fois, et un graphique pour comprendre ce qu'il faut faire. Une démarche est expliquée dans la section du contenu, à l'objectif 1.1.4.	1.1.4 Étant donné les coordonnées du sommet et du foyer d'une parabole, TROUVER l'équation associée à son lieu et vice versa.

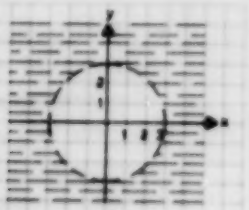
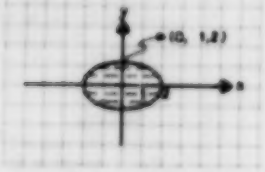
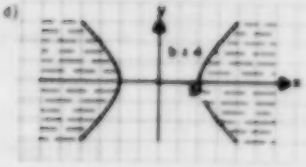
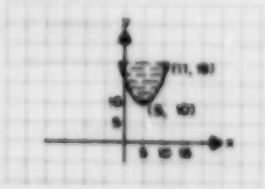
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
5. c) Quelle est l'équation associée à la parabole dont le sommet est (-2, 20) et dont les coordonnées du foyer sont (-3, 20)?	Les élèves devraient découvrir les formes: $(y - k)^2 = 4a(x - h)$ $(x - h)^2 = 4a(y - k)$ en plus de: $x = ay^2 + by + c$ $y = ax^2 + bx + c$	
6. Trouve les coordonnées des sommets et des foyers des paraboles associées à: $4y = x^2 - 40x + 264$? $4x = y^2 - 40y + 408$?	Une première étape consiste à transformer l'équation donnée sous sa forme canonique puisqu'elle permet d'identifier immédiatement le sommet et la distance entre le foyer et le sommet. En plus, la forme de l'équation canonique permet de déterminer l'équation de l'axe de symétrie de la parabole.	
7. Trouve les équations des axes de symétrie et des directrices des paraboles associées aux équations: $4y = x^2 - 40x + 264$ $4x = y^2 - 40y + 408$ (no 6)	Ils ont vu, à l'objectif 3.3.2 de l'option I, les équations de l'axe de symétrie et de la directrice lorsque le sommet de la parabole est à l'origine. Il n'y a qu'un pas à faire pour qu'ils découvrent que, si l'équation de la parabole est de la forme: $(x - h)^2 = 4a(y - k)$ ou $(y - k)^2 = 4a(x - h)$, l'équation de l'axe de symétrie aura la forme: $x = h$ $y = k$ et l'équation de la directrice aura la forme: $y = k - a$ $x = h - a$ Les situations d'apprentissage traiteront toujours des cas centrés à l'origine pour déboucher sur les autres, puisque le cercle, l'ellipse et l'hyperbole sont devenus des objectifs facultatifs pour l'option I; nous devons donc les voir en option II.	1.1.6 TROUVER l'équation de l'axe de symétrie ou de la directrice d'une parabole donnée.

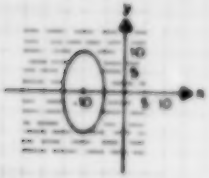
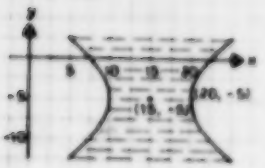
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
8. Toujours en examinant l'île type, trouve les équations associées aux cercles suivants en utilisant la propriété géométrique: a) centre (0, 0); rayon = 4 b) " (0, 0); " = 8 c) " (0, 20); " = 8 d) " (20, -36); " = 8 e) " (48, 20); " = 3	Le contenu des exercices a et b est expliqué à l'objectif 3.3.6 de l'option I, aux pages 277 et 278 (16-3303-02). Les élèves doivent conclure que la forme de l'équation qui représente un cercle centré à l'origine est: $x^2 + y^2 = r^2$ ou $r = \sqrt{}$. Quant aux exercices 8 c, d et e, les élèves devraient se servir de la définition du cercle et de Pythagore pour arriver à la forme canonique du cercle qui est: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ N.B.: Voir contenu pour plus de précision.	1.1.5 Étant donné le rayon et le centre d'un cercle, TROUVER l'équation associée à son lieu et vice versa.
9. Trouve la longueur des rayons et les coordonnées des centres des cercles associés à: a) $x^2 + y^2 = 64$ b) $x^2 + y^2 = 16$ c) $(x - 20)^2 + y^2 = 64$ d) $(x - 40)^2 + (y + 20)^2 = 64$ e) $x^2 + y^2 + 40x + 72y + 1632 = 0$	Les élèves n'ont qu'à transformer l'équation donnée sous sa forme canonique pour en déduire immédiatement le centre et le rayon. Faire remarquer que dans le symbole de l'île, il y a des courbes qui ont les formes suivantes: Ellipses Hyperboles 	

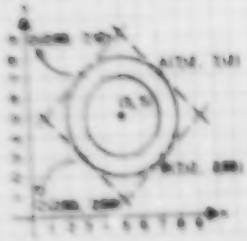
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
10. Tu dois trouver les équations des deux ellipses et des deux hyperboles du symbole de l'île, sachant que les ellipses ont comme foyers: E_1 $(-4\sqrt{3}, 0)$, $(4\sqrt{3}, 0)$; E_2 $(0, 4\sqrt{3})$, $(0, -4\sqrt{3})$ et que deux des sommets sont: E_1 $(-8, 0)$, $(8, 0)$; E_2 $(0, -8)$, $(0, 8)$. Quant aux hyperboles leurs foyers sont: H_1 $(-5, 0)$, $(5, 0)$; H_2 $(0, -5)$, $(0, 5)$ et les sommets se situent à: H_1 $(-4, 0)$, $(4, 0)$; H_2 $(0, -4)$, $(0, 4)$.	Avant de réaliser l'objectif 1.1.7 de ce cours, les élèves doivent connaître les équations associées aux ellipses et aux hyperboles centrées à l'origine (forme générale et canonique). Ce qui correspond à l'objectif 3.3.10 de l'option I. Le contenu est précisé dans le document 16-3301-01, aux pages 281 à 285. On doit guider les élèves en leur demandant d'appliquer les définitions se rapportant à ces deux coniques. Ils devraient arriver à: Ellipse — Hyperbole Forme canonique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ Forme générale $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ Signaler aux élèves que, si on leur donne l'équation d'une ellipse ou d'une hyperbole centrée à l'origine, ils doivent en tant que graphistes être en mesure de trouver les foyers et les sommets.	3.3.10 de 431
11. Détermine les coordonnées des sommets et des foyers de: 1) $x^2 + 4y^2 - 64 = 0$ 2) $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$	Cette activité couvre l'objectif 3.3.11 de l'option I. Le contenu est précisé dans le document 16-3303-01, aux pages 285 et 286. Suggérer aux élèves de transformer les équations données sous leur forme canonique; ainsi l'identification de la conique, de ses foyers et de ses sommets se fait assez rapidement.	3.3.11 de 431

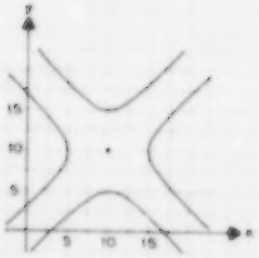
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
12. Il existe comme tu le vois plusieurs cercles, ellipses et hyperboles sur l'île. Trouve l'équation canonique et l'équation générale de chaque conique donnée lorsqu'elle subit la translation suivante: 1) $t_{(+\infty,+\infty)}$ $x^2 + y^2 = 64$ 2) $t_{(+\infty,0)}$ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 3) $t_{(-\infty,2\infty)}$ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$	En se servant de l'île type et des translations données, l'identification des coniques est chose simple. À l'activité 10, les élèves ont trouvé les équations canoniques et générales de l'ellipse et de l'hyperbole centrées à l'origine. Ici ils doivent poursuivre en généralisant ces équations. Ils doivent arriver à: • $t_{(h,k)}(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}$ qui représente la forme canonique du cercle; • $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ qui représente la forme générale du cercle; • $t_{(h,k)}(E) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1\}$ qui représente la forme canonique de l'ellipse; • $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ qui peut représenter la forme générale de l'ellipse; • $t_{(h,k)}(H) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = \pm 1\}$ qui représente la forme canonique de l'hyperbole; • $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ qui peut représenter la forme générale de l'hyperbole. N.B.: Attention, les définitions de (a) et (b) dans ce document ont été modifiées afin d'avoir une seule forme canonique pour l'ellipse; même chose pour l'hyperbole. En plus, tout ce qui concerne l'ellipse et l'hyperbole non centrées à l'origine est facultatif pour l'option I(.	I.1.7 Étant donné un cercle, une ellipse ou une hyperbole centré à l'origine, TROUVER l'équation canonique ou générale de son image par une translation. 534 cercle 531 ellipse et hyperbole

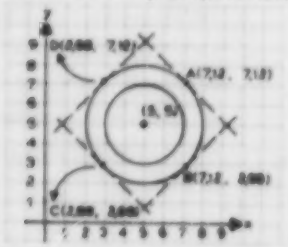
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
13. Avant de représenter chaque pavillon sur le plan de l'Île, votre patron vous demande de représenter sur des feuilles quadrillées différentes les régions du plan concernées par: • $x^2 + y^2 - 25$ • $x^2 - 4y^2 - 100 > 0$ • $16x^2 - 25y^2 - 400$ • $x^2 + 10x - 4y - 8 < 0$ • $x^2 + y^2 - 20x + 10y + 121 < 0$ • $x^2 + 4y^2 + 16x - 40y + 64 < 0$ • $16x^2 - 25y^2 - 160x - 250y + 625 > 0$	Voir document 16-3303-01, aux pages 278, 279, 288 et 289, pour les notions concernant les coniques centrées à l'origine. Voici une démarche qu'on peut suggérer aux élèves. 1) Transformer l'équation donnée sous sa forme canonique. 2) Identifier la conique concernée. 3) Trouver quelques points caractéristiques. 4) Tracer la conique. 5) Vérifier à l'aide d'un point quelconque la relation donnée. 6) Identifier la région du plan définissant la relation donnée. La section du contenu élabore plusieurs exemples; à vous de les exploiter.	1.1.8 REPRÉSENTER dans le plan, la région déterminée par une relation définissant une parabole, un cercle, une ellipse, une hyperbole ou la région du plan associée à l'un de ces lieux géométriques. Non centrées: 534 parabole et cercle 531 ellipse et parabole
14. Trouve la relation associée à chaque graphique. a)  	Les notions concernant cet objectif se rapportant au cercle, à l'ellipse et à l'hyperbole centrés à l'origine se trouvent dans le document 16-3303-01, aux pages 279 et 290. Quant aux coniques non centrées, on trouve les notions s'y rapportant dans ce document, à la section du contenu de cet objectif. Une première activité (14) consiste à trouver les relations, centrées à l'origine, associées à ces lieux. Voici une démarche que les élèves pourraient suivre: 1) Trouver l'équation de la conique concernée sous sa forme canonique. 2) Calculer les valeurs des paramètres (a, b). 3) Choisir un point dans la région du plan concerné et le substituer	1.1.9 Étant donné une parabole, un cercle, une ellipse, une hyperbole ou la région du plan associée à l'un de ces lieux géométriques, TROUVER la relation associée à ce lieu. Non centrées: 534 parabole et cercle 531 ellipse et hyperbole

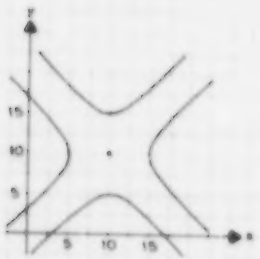
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
b)  c)  d)  15. Trouve les relations associées aux lieux suivants: a) 	dans la relation, afin de trouver le symbole approprié ($=$, $<$, $\leq$, $>$ ou $\geq$). 4) Inscrire la relation trouvée. Maintenant, il faut trouver des relations non centrées à l'origine, associées à des lieux donnés. La même démarche qu'à l'activité précédente peut s'appliquer ici. Par contre, il faut ajouter à l'étape 2 deux paramètres (h, k), puisque les coniques sont non centrées à l'origine. Cette activité terminée, il serait intéressant de présenter aux élèves les définitions théoriques présentées dans la section du contenu de cet objectif.	1.1.9 Étant donné une parabole, un cercle, une ellipse, une hyperbole ou la région du plan associée à l'un de ces lieux géométriques, TROUVER la relation associée à ce lieu. (suite)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
b) c)  d)  6. À un certain moment du déroulement du projet, tu auras besoin des limites des terrains pour chaque pavillon, pour les chemins, pour le parc d'amusement, pour les services, etc. Tu devras donc trouver le domaine et l'image de chaque relation associée à ces éléments. Trouve le domaine et l'image de chaque	Les notions de domaine et d'image d'une relation (objectif 3.1.5 de l'option I) sont connues des élèves. Ils ont aussi vu ces notions se rapportant à la parabole dont le sommet est à l'origine (objectif 3.3.5 d'option I). Quant au cercle, à l'ellipse et à l'hyperbole centrés à l'origine, le document 13-2303-01 vous en précise le contenu aux pages 278 et 291. Et ce document, à la section contenu, vous précise le domaine et l'image des coniques non centrées.	1.1.10 TROUVER le domaine et l'image d'une relation définissant une parabole, un cercle, une ellipse, une hyperbole ou la région du plan associée à l'un de ces lieux géométriques.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
4. relation donnée aux activités 14 et 15.	Les élèves devraient, après avoir réalisé l'activité 15, généraliser leurs définitions. La section du contenu de ce document vous en donne un exemple. 3.3.: nécessairement, sur le plan de l'île, les domaines et les images sont traités par d'autres coniques. Il faut le mentionner aux élèves.	
5. Une compagnie qui a loué un pavillon veut exposer des objets à l'extérieur de celui-ci. Elle demande si elle peut ériger une clôture dont les côtés seraient tangents à un cercle concentrique au pavillon possédant un rayon plus grand que ce dernier. Quelles seraient les équations qui représentent des droites sachant que les points de tangence sont les points A, B, C et D du graphique suivant:  	Les élèves possèdent toutes les notions pour réaliser cette activité s'ils ont vu l'objectif 3.3.1 de ce cours, qui traite de la notion de tangente à un cercle. Sinon, vous devez définir cette dernière. La section du contenu de cet objectif indique une démarche qu'on peut suggérer aux élèves. On peut aussi demander aux élèves de résoudre quelques situations particulières et de généraliser par la suite, afin de déterminer l'équation de la tangente qui passe par un point de tangence $P(x_1, y_1)$ à un cercle dont $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ qui est: $y - y_1 = -\left(\frac{x_1 - h}{y_1 - k}\right)(x - x_1)$	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
10. Une façon de vérifier le tracé d'une hyperbole est de trouver les équations de ses asymptotes et de les tracer. On te demande donc de: 1° trouver les équations des asymptotes de: a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = -1$ 2° tracer ces dernières.  	Avant que les élèves réalisent cette activité, il faut leur donner une définition de l'asymptote, qui se trouve dans le document 16-3303-01, à la page 287, et aussi leur faire découvrir les équations des asymptotes d'une hyperbole, qui sont: $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$	3.3.12 de 431

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
16. relation donnée aux activités 14 et 15.	Les élèves devraient, après avoir réalisé l'activité 14, généraliser leurs définitions. La section du contenu de ce document vous en donne un exemple. N.B.: Nécessairement, sur le plan de l'île, les domaines et les images sont limités par d'autres coniques. Il faut le mentionner aux élèves.	1.1.10 (suite) Non centrées: 534 parabole et cercle 531 ellipse et hyperbole
17. Une compagnie qui a loué un pavillon veut exposer des objets à l'extérieur de celui-ci. Elle demande si elle peut ériger une clôture dont les côtés seraient tangents à un cercle concentrique au pavillon possédant un rayon plus grand que ce dernier. Quelles seraient les équations qui représentent ces clôtures sachant que les points de tangence sont les points A, B, C et D du graphique suivant:  	Les élèves possèdent toutes les notions pour réaliser cette activité s'ils ont vu l'objectif 3.3.1 de ce cours, qui traite de la notion de tangente à un cercle. Sinon, vous devez définir cette dernière. La section du contenu de cet objectif indique une démarche qu'on peut suggérer aux élèves. On peut aussi demander aux élèves de résoudre quelques situations particulières et de généraliser par la suite, afin de découvrir l'équation de la tangente qui passe par un point de tangence $P(x_1, y_1)$ à un cercle donné $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ qui est: $y - y_1 = -\left(\frac{x_1 - h}{y_1 - k}\right)(x - x_1)$	1.1.11 Un cercle et les coordonnées du point de tangence étant donnés, TROUVER l'équation de la tangente.

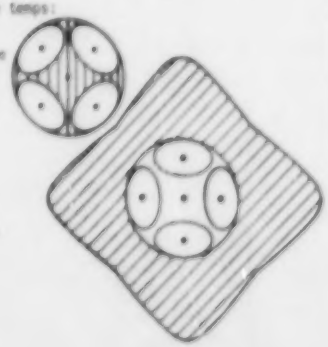
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
18. Une façon de vérifier le tracé d'une hyperbole est de trouver les équations de ses asymptotes et de les tracer. On te demande donc de: 1° trouver les équations des asymptotes de: a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = -1$ 2° tracer ces dernières.  	Avant que les élèves réalisent cette activité, il faut leur donner une définition de l'asymptote, qui se trouve dans le document 16-3303-01, à la page 287, et aussi leur faire découvrir les équations des asymptotes d'une hyperbole, qui sont: $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$	3.3.12 de 431

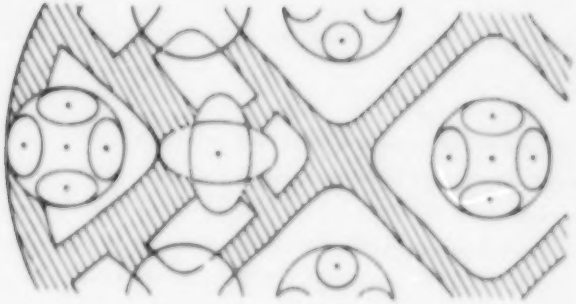
OBJECTIF TERMINAL N°: 1.2 RÉSOUDRE des problèmes utilisant des relations du premier ou du second degré. 521

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
À partir du projet de l'île, on simule une exposition mondiale. La publicité parvenue aux pays contient les renseignements suivants: 1. Plan de l'île. 2. Conditions pour être accepté comme exposant. 3. Liste de prix des emplacements. 4. Durée de l'exposition. 5. Heures d'ouverture et de fermeture. 6. Endroit où est située l'île. Ta tâche consiste à compiler les demandes de réservation et à indiquer sur le plan de l'île les emplacements réservés.	On poursuit l'activité LICONEX pour cet objectif terminal. En plus du plan de l'île, les élèves devraient avoir constamment sous les yeux le tableau-synthèse des coniques. Il leur sera d'une très grande utilité tout au long de cet objectif terminal.	
19. Les pays A, B et C désirent les emplacements délimités par: A: $x^2 + y^2 + 40y + 336 = 0$ B: $x^2 + 4y - 48 = 0$ et par $x^2 + y^2 - 40y + 336 = 0$ C: $4x^2 + y^2 + 256x + 40y + 4432 = 0$	Les élèves possèdent toutes les notions nécessaires pour réaliser cette activité. Voici une démarche que les élèves pourraient suivre: 1) Transformer, s'il y a lieu, l'équation donnée sous sa forme canonique.	1.2.1 La définition d'un lieu géométrique étant donnée, DÉTERMINER la section conique qui lui est associée et vice versa.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
19. (suite) Quelles sections coniques sont représentées par ces relations et où se situent-elles dans le plan de l'île?	2) Selon sa forme canonique et à l'aide du tableau-synthèse, identifier la conique concernée. 3) Trouver le sommet (parabole) ou le centre de la conique (h, k) et d'autres points caractéristiques intéressants (les zéros, les sommets, le rayon, etc.), afin de bien situer la conique donnée.	1.2.1 [531] La définition d'un lieu géométrique étant donnée, DÉTERMINER la section conique qui lui est associée et vice versa. (suite)
20. Deux autres pays désirent des emplacements: D: de forme elliptique dont le centre se situe à (76, 5,5) et dont deux des sommets sont (76, 8) et (80, 5,5). E: de forme hyperbolique dont le centre est à (-20, -36) et dont les sommets se situent à (-16, -36) et (-24, -36). Définis ces lieux géométriques.	À l'aide du tableau-synthèse, l'élève applique directement ses données dans la forme d'équations associées à la conique spécifiée. Si on demandait la forme générale comme définition du lieu, il suffirait de transformer l'équation canonique.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
21. Trouve les équations associées aux demandes suivantes: Pays F: Un emplacement elliptique dont le centre est situé à (0, -14,5) du centre de l'île et dont les sommets sont (0, -12), (0, -17), (-4, 14,5) et (4, 14,5). Pays G: Un emplacement de forme parabolique dont le sommet passe par (20, 36) et dont l'équation correspond à une translation de $y = \frac{1}{4}x^2$ et limité par le cercle $(x - 20)^2 + (y - 36)^2 = 64$. Pays H: Il veut occuper un pavillon en entier. Il désire les quatre (4) emplacements associés aux translations suivantes: $r : \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ et $s : \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = -1$ soit t(60, 20) r et t(60, 20) s les 2 (r et s) limitées par $(x - 60)^2 + (y - 20)^2 = 64$.	Le tableau-synthèse des coniques est fort utile pour cet objectif, puisque les caractéristiques de chaque conique y sont représentées. On peut ici ajouter plusieurs demandes de réservations d'emplacements, selon le temps dont on dispose pour couvrir cet objectif et selon les notions qu'on désire revoir. À vous d'en ajouter selon vos besoins. D'autres situations sont exposées dans la section du contenu de ce même objectif.	1.2.2 [531] Les caractéristiques d'un lieu géométrique étant données, TROUVER l'équation associée à ce lieu.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
22. Quelles sont les parties du plan représentées par: 1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 64\} - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 16\}$? 2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x+20)^2}{64} + \frac{y^2}{16} < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x+20)^2}{16} + \frac{y^2}{64} < 1\}$? 3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-20)^2 + (y+36)^2 < 64\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + 34 < \frac{1}{4}(x-20)^2\}$? etc.	La diversité des situations qui peuvent être présentées aux élèves est énorme. Il faut consulter la section du contenu de cet objectif pour en avoir une idée. Voici d'autres exemples qui pourraient intéresser les élèves, mais dont la réalisation demande beaucoup de temps: • Représenter dans le plan de l'île les surfaces de circulation de chaque pavillon (équations et graphiques). • Représenter la partie gazonnée entourant chaque pavillon (équation et graphique). 	1.2.3 [531] REPRÉSENTER dans le plan la région déterminée par l'union, l'intersection ou la différence de deux relations.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	• Représenter sur le plan de l'île les chemins qui doivent être en ciment (équations et graphique). 	
23. Quels sont les domaines et les images des relations de l'activité précédente (22)?	Les notions de domaine et d'image sont connues des élèves. Ils peuvent rapidement, à l'aide du graphique, trouver les domaines et les images de l'union, de l'intersection ou de la différence de deux relations.	1.2.4 531 TROUVER le domaine et l'image de l'union, de l'intersection ou de la différence de deux relations.

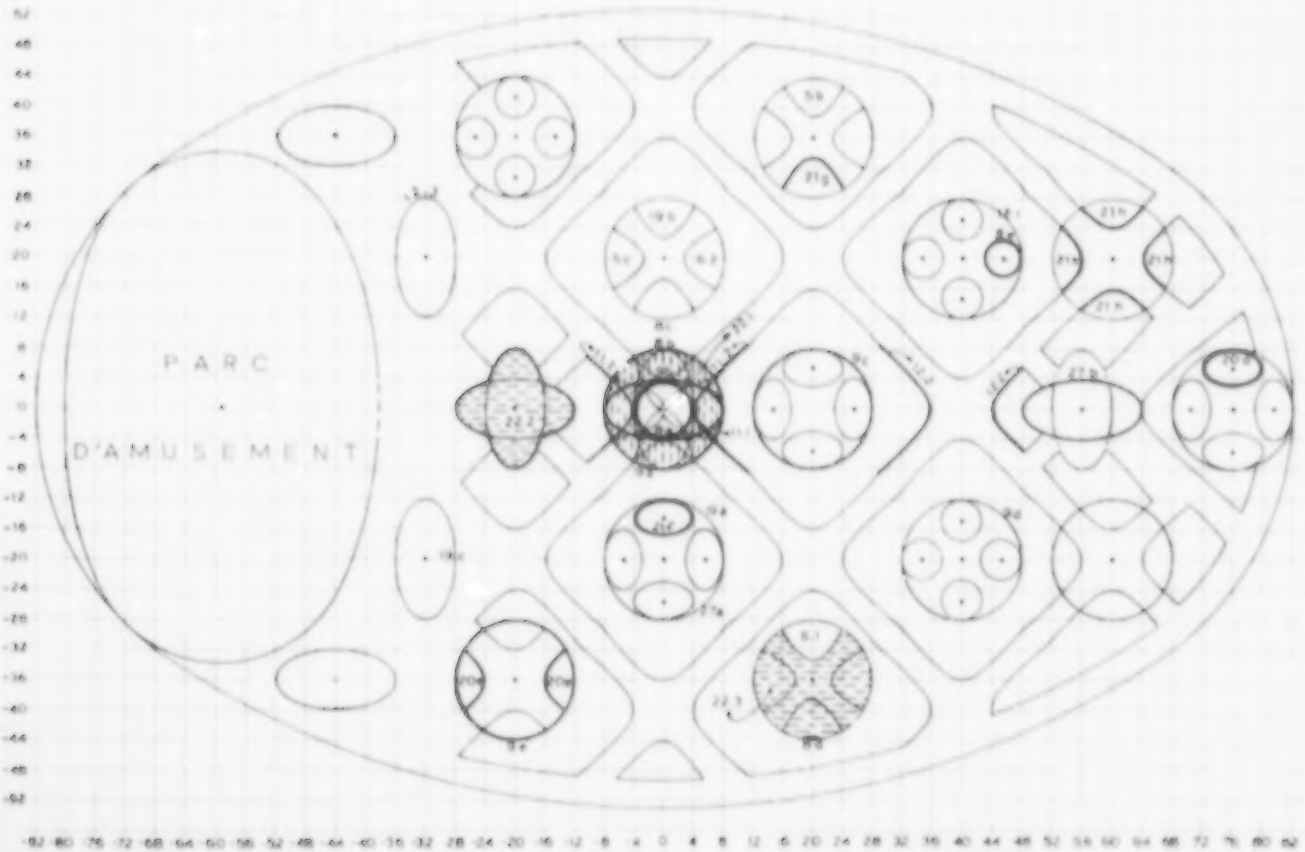
OBJECTIF TERMINAL N° : 1.3 RÉSOUDRE des problèmes utilisant des équations paramétriques pour définir un ensemble de lieux géométriques. [531]

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	Avant de trouver des familles de coniques, il est préférable de travailler avec les droites.	
24. Sur une feuille quadrillée, trace les droites suivantes: Série A: 1) $y = x + 2$ 2) $y = 2x + 2$ 3) $y = -2x + 2$ 4) $y = 3x + 2$ 5) $y = -3x + 2$ etc. Série B: 1) $y = -x + 1$ 2) $y = -x + 2$ 3) $y = -x + 3$ 4) $y = -x + 1$ 5) $y = -x - 2$ etc. Énonce une propriété commune pour chaque série: A: B:	Amener les élèves à remarquer pour la série A que toutes les équations possèdent la même valeur de b et que le paramètre est m lorsque l'équation est $y = mx + b$. Après avoir tracé les graphiques de ces droites, ils pourront affirmer que la famille des droites ayant comme équation $y = mx + 2$ est la famille des droites concourantes au point (0, 2). Quant à la série B, ils symboliseront l'équation par $y = -x + b$ et diront que c'est la famille des droites parallèles de pente -1.	1.3.1 [531] L'équation paramétrique associée à une famille de droites, de paraboles, de cercles, d'ellipses centrées à l'origine ou d'hyperboles centrées à l'origine étant donnée, TRACER dans le plan quelques éléments de cette famille.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
25. Sur des feuilles quadrillées, trace quelques éléments des familles suivantes: Série C: $x^2 = 4ay$ où a est le paramètre. Série D: $x^2 + y^2 = r^2$ où r est le paramètre. Série E $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{16} = 1$ où a est le paramètre. $\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ où b est le paramètre. Série F $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{9} = 1$ où a est le paramètre. $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{b^2} = 1$ où b est le paramètre. Énonce une propriété commune pour chaque famille.	On doit laisser les élèves tracer quelques graphiques de chaque famille, afin qu'ils puissent voir ce qui se passe lorsqu'ils font varier le paramètre. Ils pourront facilement décrire le type de famille par la suite. Il existe beaucoup d'autres familles que celles données dans cette activité. Il ne faut pas perdre de vue que l'objectif couvre les paraboles et les cercles de tous genres et les ellipses et hyperboles centrées à l'origine seulement.	1.2.1 S3! L'équation paramétrique associée à une famille de droites, de paraboles, de cercles, d'ellipses centrées à l'origine ou d'hyperboles centrées à l'origine étant donnée, TRACER dans le plan quelques éléments de cette famille. (suite)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
26. Trouve les équations paramétriques associées aux familles suivantes et identifie certains de leurs graphiques sur l'île : • cercles centrés à l'origine; • cercles de même rayon dont le centre se déplace sur l'axe des "x"; • paraboles dont le sommet passe par l'origine et dont l'axe de symétrie est l'axe des "y"; • paraboles qui possèdent le même "a" et dont les axes de symétrie sont parallèles à l'axe des "y"; • ellipses centrées à l'origine dont le grand axe est 16; • ellipses centrées à l'origine dont deux des sommets passent par (-4, 0) et (4, 0); • hyperboles centrées à l'origine dont le grand axe est 6.	Le tableau-synthèse peut être d'une grande utilité ici. Après avoir choisi l'équation associée à une famille de coniques, il ne reste qu'à remplacer une ou deux variables par des constantes appropriées qui fixent la famille dont on parle et d'y introduire le paramètre qui identifie la famille. Puisqu'on travaille sur l'île, l'activité ne contient pas d'exercices sur les familles de droites. Il faudrait en demander aux élèves (voir la section du contenu qui couvre cet objectif).	1.3.2 [12] Certaines conditions étant données, TROUVER l'équation paramétrique associée à une famille de droites, de paraboles, de cercles, d'ellipses centrées à l'origine ou d'hyperboles centrées à l'origine.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
27. a) Trouve l'équation associée à la famille de cercles représentée par $(x - h)^2 + (y - k)^2 = 64$, dont le centre est situé au point $(0, -20)$. b) Trouve l'équation associée à la famille représentée par $\frac{(x - h)^2}{8^2} + \frac{(y - k)^2}{4^2} = 1$, dont le centre est situé à $(56, 0)$. etc.	Les élèves peuvent facilement trouver l'équation du lieu puisque cet objectif n'est qu'un cas particulier du précédent. Selon le temps dont on dispose, on ajoute quelques exercices à cette activité. Maintenant, les élèves peuvent construire leur flo et la présenter aux autres lorsqu'elle sera terminée. Si on demande aux élèves d'inscrire à l'endos du projet les équations de chaque conique par rapport à un système d'axes qu'ils fixent au départ, cette réalisation serait l'occasion d'une bonne révision de l'ensemble des coniques. Un solutionnaire de plusieurs activités de la situation d'apprentissage est présenté à la page suivante.	1.3.1 [531] Certaines conditions étant données, TROUVER l'équation associée à un lieu géométrique appartenant à une famille de droites, de paraboles, de cercles, d'ellipses, centrées à l'origine ou d'hyperboles centrées à l'origine.


PARC
D'AMUSEMENT

OBJECTIF GÉNÉRAL

N°: 2

Thème: FONCTIONS RÉELLES

Durée: 45 HEURES

OBJECTIF TERMINAL Nº : 2.1 RÉSOUDRE des problèmes se traduisant par des fonctions polynomiales d'un degré inférieur à quatre.
2.2 RÉSOUDRE des problèmes se traduisant par une fonction réelle.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Tu es responsable d'un centre d'information de la NASA. Tu dois gérer diverses missions dont les buts sont différents. Pour ce faire, tu dois noter certains renseignements pour assurer la réussite de chacune des missions. Ces renseignements te seront faciles à obtenir si tu réponds bien aux différentes questions qui te seront posées à chacune des missions. Alors bonne chance dans ta tâche et j'espère que tu seras le meilleur responsable de... ta classe!	Le texte d'introduction ci-contre s'adresse à l'élève, ce qui nous a amené à utiliser le tutoiement. On le place immédiatement en situation: Il est responsable d'un centre de cueillette de données. Chacune des fonctions au programme est étudiée dans un sous-problème particulier représentant une mission spatiale à réaliser par l'élève. Tous les objectifs reliés à chaque fonction sont alors étudiés dans la mission. À la fin des missions, tous les objectifs du programme auront été étudiés. Il faut remarquer que l'accent est d'abord mis sur les représentations graphiques des fonctions, afin que les élèves visualisent bien les différents types de fonctions. Par la suite, on traite les fonctions d'une façon algébrique et, partant de là, on essaie de faire découvrir à l'élève certaines propriétés que possèdent ces diverses fonctions. Pour supporter davantage ces mises en situation, l'enseignant pourra utiliser un didacticiel créé spécifiquement pour cette section du programme. Il ne faut pas oublier la situation de départ de chaque mission.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

1re mission:

Ta première mission est d'anéantir un météorite qui menace de s'écraser sur la Terre. Le nom de code de l'opération est LASER.

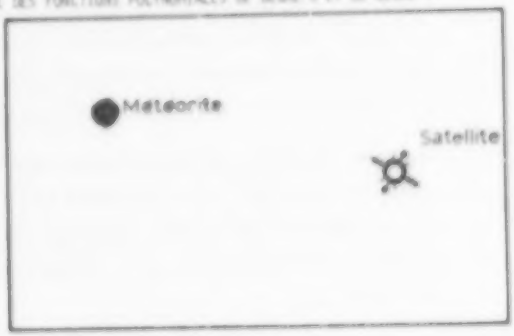
Pour ce faire, tu te sers d'un satellite muni d'un super rayon laser. Selon la position du satellite et de l'objectif à atteindre, le rayon parcourt un trajet oblique ou un trajet horizontal.

Dans l'accomplissement de ta tâche, tu dois recueillir certaines informations en répondant à quelques questions.

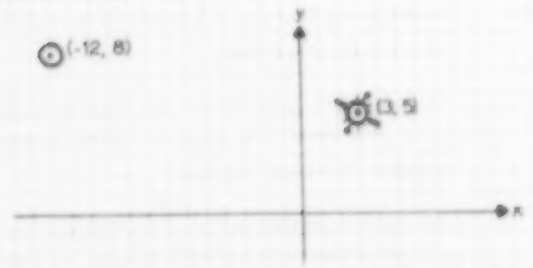
Sur l'écran de repérage situé au sol, tu visionnes la situation ci-contre:

1. Selon la situation présentée à l'écran, quel type de rayon laser dois-tu utiliser (oblique ou horizontal)?

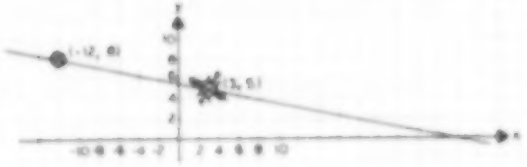
ÉTUDE DES FONCTIONS POLYNOMIALES DE DEGRÉ 0 ET DE DEGRÉ 1



- Présenter le plan cartésien suivant:



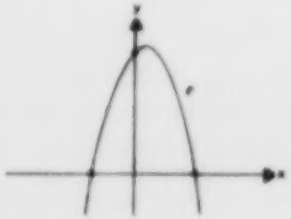
- La réponse est "oblique". Si l'élève répond "horizontal", lui faire constater qu'il ne pourra atteindre la météorite.

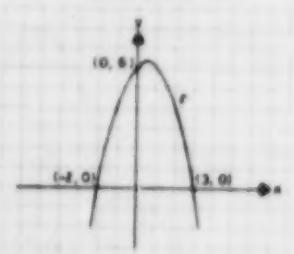
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
2. Pour vérifier visuellement l'exactitude de ta réponse, trace la droite joignant le satellite (3, 5) au météorite (-12, 8). Quelle est l'équation de cette droite?	- Voici cette droite: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{23}{5}$  	2.1.1 TRACER le graphique cartésien d'une fonction polynomiale.
3. Cette trajectoire (ou son prolongement) coupe l'axe des x en un point (x, 0) et l'axe des y en un point (0, y). a) Quelle est la valeur de l'abscisse à l'origine? b) Quelle est la valeur de l'ordonnée à l'origine?	- Rappeler à l'élève que la valeur de x dans le couple (x, 0) s'appelle l'abscisse à l'origine et que la valeur du y dans le couple (0, y) s'appelle l'ordonnée à l'origine. - abscisse à l'origine : 23 - ordonnée à l'origine : $\frac{23}{5}$	
4. Si on appelle "zéro(s) d'une fonction f" la (les) valeur(s) de x lorsque f(x) = 0, quel est le zéro de la fonction que tu as tracée précédemment?	- Faire le lien entre le zéro de la fonction et l'abscisse à l'origine. Le zéro de la fonction est 23.	2.1.7 DÉTERMINER les zéros, s'ils existent, d'une fonction polynomiale.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
5. Si on appelle "maximum d'une fonction f" (ou minimum) la plus grande (ou la plus petite) valeur réelle de y, la fonction précédente a-t-elle alors un maximum ou un minimum?	- Si l'élève répond qu'elle a un maximum ou un minimum, lui faire constater que la droite étant illimitée, il ne pourra jamais trouver de plus grande valeur réelle pour y, ni de plus petite valeur réelle, donc qu'il n'y a pour cette fonction ni de maximum, ni de minimum.	2.1.3 DÉTERMINER le minimum ou le maximum d'une fonction polynomiale.
6. Si on appelle "fonction croissante" toute fonction dans laquelle $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ alors la fonction précédente est-elle croissante ou décroissante?	- L'élève doit répondre que la fonction est décroissante. Dans le cas contraire, l'inviter à revenir à la définition de façon à bien la comprendre. S.S.: On peut, comme activité supplémentaire, faire la distinction entre une fonction croissante et une fonction strictement croissante, de même qu'entre une fonction décroissante et une fonction strictement décroissante.	2.1.4 Une fonction polynomiale étant donnée, DÉTERMINER si elle est croissante ou décroissante dans un intervalle donné.
7. Une fonction f est dite positive dans un intervalle donné si tous les f(x) sont positifs dans cet intervalle, et elle est dite négative dans un intervalle donné si tous les f(x) sont négatifs dans cet intervalle. D'où: • Dans quel intervalle la fonction étudiée est-elle positive? • Dans quel intervalle la fonction est-elle négative?	- L'élève doit répondre $]-\infty, 2[$. - L'élève doit répondre $]2, +\infty[$.	2.1.8 DÉTERMINER le signe d'une fonction polynomiale.

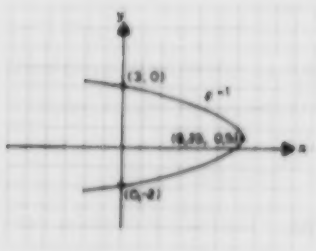
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
6. a) Quel est le domaine de cette fonction? b) Quelle est l'image de cette fonction?	- Rappeler aux élèves les définitions de domaine et d'image d'une fonction. dom f : $\mathbb{R}$ img f : $\mathbb{R}$	2.1.2 IDENTIFIER le domaine et l'image d'une fonction polynomiale.
9. Lorsqu'une fonction f est définie par $f: x \mapsto ax^n$ ($a \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$), on dit que f est: - une fonction constante, si $n = 0$, - une fonction de variation directe, si $n = 1$. De plus, si f est une fonction de variation directe et que $a = 1$ et $n = 1$, on dit que f est une fonction identité. - La fonction étudiée est-elle constante? Justifie ta réponse. - Est-elle une fonction de variation directe? Justifie ta réponse. - Est-elle une fonction identité? Justifie ta réponse. - Quel type de rayon laser illustrerait une fonction dite constante?	- Non. Car l'équation de la trajectoire est une équation du 1er degré. - Non. Car la trajectoire ne passe pas par l'origine. - Non. Car n'étant pas une fonction de variation directe, elle n'est sûrement pas une fonction identité. - De type horizontal. Ici, il serait intéressant de demander à l'élève à quelle condition la navette pourrait utiliser un tel type de rayon pour détruire la météorite.	2.1.3 IDENTIFIER si une fonction est une fonction de variation directe, une fonction identité ou une fonction constante.

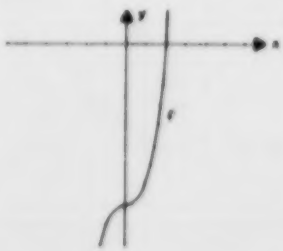
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
10. Quelle est l'équation de la réciproque de cette fonction?	- Ici, il faudrait rappeler la méthode algébrique pour trouver la réciproque d'une fonction, méthode que l'on peut trouver dans la section du contenu, à l'objectif 2.1.6.	2.1.6 TROUVER la réciproque d'une fonction polynomiale du premier ou du second degré.
	- Faire constater à l'élève que toute réciproque f^{-1} d'une fonction f est symétrique à f par rapport à la bissectrice des 1^{er} et 3^{e} quadrants.	
	- L'équation de la réciproque est $y = -5x + 28$.	
11. Maintenant que tu as recueilli certaines informations, laquelle (lesquelles) te semble(nt) essentielle(s) pour réussir ta mission qui était d'anéantir la météorite?	- L'élève devrait donner au moins 2 conditions lui permettant de trouver l'équation de la droite.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
2e mission: Voici la nouvelle mission que le commandant te confie: il faut secourir une colonie de chercheurs qui se trouve sur une planète située de l'autre côté d'un amas d'astéroïdes. Le nom de code de cette délicate opération est CONTOUR. Après analyse de la situation illustrée ci-contre, on te propose de faire contourner cet obstacle en suivant une trajectoire particulière définie par la fonction $f: x \mapsto -x^2 + x + 6$	ÉTUDE DE LA FONCTION POLYNOMIALE DE DEGRÉ 2. 	
1. Sur une feuille quadrillée, trace dans le plan cartésien le graphique de cette fonction.	- L'allure de la courbe devrait ressembler à celle ci-dessous:  	2.1.1 TRACER le graphique cartésien d'une fonction polynomiale.
2. La courbe obtenue coupe-t-elle • l'axe des x? • l'axe des y?	- En profiter pour reprendre les notions d'abscisse à l'origine et d'ordonnée à l'origine. - La courbe coupe les 2 axes.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
3. Écris l'équation qui représente cette fonction et trouve les zéros de cette fonction que tu identifieras sur ta figure. Trouve aussi la valeur de l'ordonnée à l'origine.	- Amener l'élève à écrire son équation sous la forme $y = ax^2 + bx + c$. - Rappel de la notion de "zéro d'une fonction". - L'élève devrait trouver le graphique suivant:  • L'équation est $y = -x^2 + x + 6$. • Les zéros sont $x = -2$ et $x = 3$. • L'ordonnée à l'origine est 6.	2.1.7 DÉTERMINER les zéros, s'ils existent, d'une fonction polynomiale.
4. a) Cette fonction a-t-elle un maximum ou un minimum? b) Quelle est sa valeur?	- Il doit répondre un maximum. - Sa valeur est $\frac{25}{4}$ ou 6,25. - Faire remarquer à l'élève que le maximum (ou minimum) d'une fonction du second degré est toujours l'ordonnée du sommet de la parabole obtenue et que cette ordonnée a comme valeur $\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$.	2.1.3 DÉTERMINER le minimum ou le maximum d'une fonction polynomiale.
5. Tu constates que cette fonction est croissante dans un intervalle donné et décroissante dans un autre intervalle donné. a) Dans quel intervalle est-elle croissante?	- Rappeler les définitions de croissance et de décroissance. - Dans $]-\infty, \frac{1}{2}]$.	2.1.4 Une fonction polynomiale étant donnée, DÉTERMINER si elle est croissante ou décroissante dans un intervalle donné.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
5. b) Dans quel intervalle est-elle décroissante?	- Dans $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.	
6. a) Dans quel intervalle cette fonction est-elle positive? b) Dans quel intervalle cette fonction est-elle négative?	- Rappeler qu'une fonction f est positive lorsque les f(x) sont positifs. Ici l'élève devrait répondre $]-2, 3[$. - Rappeler qu'une fonction f est négative lorsque les f(x) sont négatifs. Ici l'élève devrait répondre $]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$.	2.1.8 DÉTERMINER le signe d'une fonction polynomiale.
7. a) Quel est le domaine de cette fonction? b) Quelle est l'image de cette fonction?	- Rappeler la définition de domaine d'une fonction. dom $f = \mathbb{R}$ - Rappeler la définition de l'image d'une fonction. $\text{ima } f = \left]-\infty, \frac{25}{4}\right]$	2.1.2 IDENTIFIER le domaine et l'image d'une fonction polynomiale.
8. Trouve l'équation de l'axe de symétrie de cette parabole.	- Rappeler la définition de l'axe de symétrie d'une parabole vue dans l'option I, objectif 3.3.2. Ici l'élève doit trouver $x = \frac{1}{2}$.	
9. Sur ta feuille quadrillée, trace la réciproque de cette fonction et trouve son équation.	- Rappeler la définition de réciproque d'une fonction vue à l'objectif 4.1.6 du programme de l'option I. - Rappeler la technique algébrique telle que vue dans l'autre partie du guide (objectif 2.1.6). En partant de couples appartenant à f, tels que (-2, 0), (3, 0), (0, 6) et (0,5, 6,25), l'élève trouve les couples réciproques (0, -2), (0, 3), (6, 0) et (6,25, 0,5) et, à partir de ces couples, il peut tracer la courbe de la page suivante.	2.1.6 TROUVER la réciproque d'une fonction polynomiale du premier ou du second degré.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
10. Les renseignements que tu viens d'obtenir t'ont permis d'analyser la fonction donnée pour contourner l'anas d'astéroïdes. Or, cette fonction peut se calculer lorsqu'on connaît les zéros de la fonction et les coordonnées du sommet de la parabole associée à cette fonction. Modifions notre situation de départ et supposons que les coordonnées du satellite sont (-3, 0) et celles de la colonie sont (9, 0) et que l'anas d'astéroïdes s'étend jusqu'au point (1, 6), trouve l'équation de la fonction permettant de contourner cet anas	 Son équation est: $x = -y^2 + y + 6$. - Rappeler les notions de somme et de produit des zéros. - Rappeler aux élèves qu'ils peuvent se servir de l'équation $y = a(x^2 - Sx + P)$.	2.1.10 TROUVER l'équation de la fonction du second degré connaissant ses zéros et les coordonnées du sommet de la parabole associée.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
d'astéroïdes en passant le plus près possible de ce dernier. 1re mission: On envisage de lancer un satellite d'exploration hors de notre galaxie et la mission est de suggérer des moyens pour y parvenir. Cette opération inédite est connue sous le nom de code EXPLORER. Voici ce que tu as imaginé. Tu lances un satellite puis, par l'attraction naturelle de plusieurs petites planètes, la puissance nécessaire est alors fournie à ton vaisseau pour le propulser hors de notre système solaire. 1. Sur une feuille quadrillée, trace dans le plan cartésien le graphique de la fonction f définie par f: $x \mapsto x^3 - 8$. Tu remarques que le graphique de cette fonction ressemble étrangement à celui représentant la trajectoire du vaisseau.	ÉTUDE DE LA FONCTION POLYNOMIALE DE DEGRÉ 3. 5.3.1 On limitera cette étude à des cas simples où les zéros de la fonction peuvent être facilement déterminés. - En voici le résultat:  	2.1.1 TRACER le graphique cartésien d'une fonction polynomiale.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
2. Quels sont le domaine et l'image de cette fonction? 3. Déterminer le (ou les) zéro(s) réel(s) de cette fonction?	- dom = $\mathbb{R}$ et ima = $\mathbb{R}$. - Pour trouver les zéros réels: $x^3 - 8 = 0$ $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$ $x - 2 = 0$ ou $x^2 + 2x + 4 = 0$ $x = 2$ ↳ aucun zéro réel car $\Delta = 0$ N.B.: Comme on se limite aux cas où la factorisation est relativement simple, on aura soit 1 zéro réel, soit 2 zéros réels, soit 3 zéros réels. Ex.: $x \mapsto -x^3 + 2x^2 - x + 2$ (1 zéro réel) $x \mapsto x^3 - x^2 - 8x + 12$ (2 zéros réels) $x \mapsto x^3 - x$ (3 zéros réels) Pour ce qui est du maximum (ou du minimum), des intervalles de croissance ou de décroissance, du signe de la fonction, les exercices devront être significatifs car autrement, les "sommets" ne sont pas toujours bien identifiables dans ce type de fonction.	2.1.2 DÉTERMINER le domaine et l'image d'une fonction polynomiale. 2.1.7 DÉTERMINER les zéros, s'ils existent, d'une fonction polynomiale. 2.1.3 DÉTERMINER le minimum ou le maximum d'une fonction polynomiale. 2.1.4 Une fonction polynomiale étant donnée, DÉTERMINER si elle est croissante ou décroissante dans un intervalle donné. 2.1.8 DÉTERMINER le signe d'une fonction polynomiale.

Situation d'apprentissage

6e mission:

Une mission surprise t'attend maintenant. Il te faut établir la communication avec un satellite ami. Le nom de code de l'opération est VICTORIA.

Pour établir cette communication, on utilisera une antenne émettrice-réceptrice située sur la Terre.

Voici une fonction illustrant une telle situation: $f: x \mapsto |x|$.

1. Sur une feuille quadrillée, trace dans le plan cartésien le graphique de cette fonction.

La communication étant maintenant établie, réponds aux questions suivantes afin d'obtenir certains renseignements.

Commentaires

ÉTUDE DE LA FONCTION VALEUR ABSOLUE.

- S.O. La mission suggérée fait appel à la fonction valeur absolue non translatée. Vous devrez cependant faire l'étude de tous les types de fonction valeur absolue, c'est-à-dire la fonction valeur absolue translatée horizontalement, verticalement ou dans les 2 sens.

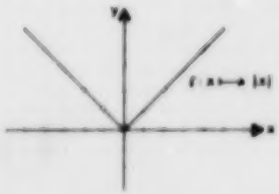
  Exemples: 1) $f: x \mapsto |x + 2|$

  2) $f: x \mapsto |x| - 3$

  3) $f: x \mapsto -|x|$

- Rappeler la technique de construction point par point.

- L'allure de la courbe pourrait ressembler à celle-ci:



Objectifs atteints

2.2.1

TRACER le graphique cartésien d'une fonction valeur absolue, d'une fonction partie entière, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
2. Quel est le minimum de cette fonction?	- Rappeler les définitions de minimum et de maximum. - L'élève devrait répondre que le minimum est 0.	2.2.3 DÉTERMINER le maximum ou le minimum d'une fonction valeur absolue, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.
3. a) Dans quel intervalle cette fonction est-elle croissante? b) Dans quel intervalle cette fonction est-elle décroissante?	- Rappeler la notion de fonction croissante. - L'élève devrait répondre $[0, \infty[$. - Rappeler la notion de fonction décroissante. - L'élève devrait répondre $]-\infty, 0]$.	2.2.4 DÉTERMINER la croissance ou la décroissance, dans un intervalle donné, d'une fonction valeur absolue, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.
4. a) Quel est le domaine de cette fonction? b) Quelle est l'image de cette fonction?	- dom f = $\mathbb{R}$. - ima f = $[0, \infty[$.	2.2.2 TROUVER le domaine et l'image d'une fonction valeur absolue, d'une fonction partie entière, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.

Situation d'apprentissage

5. Trouve l'équation de la réciproque de cette fonction.

   Sur le même graphique que celui de la fonction, illustre cette réciproque.

5e mission:

DANGER! DANGER!

Tu viens de repérer la présence d'un OVNI. On te demande des renseignements sur ce visiteur inconnu. L'opération se nomme E.T.

Les renseignements cherchés sont de deux ordres:

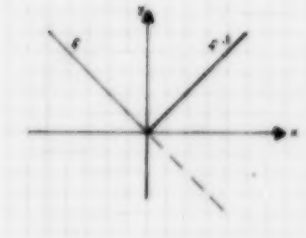
- le trajet suivi par l'OVNI,
- l'espace dans lequel il se déplace.

Après certaines recherches, tu constates qu'il se déplace selon une

Commentaires

- L'équation de la réciproque se trouve algébriquement ou graphiquement. (Voir l'autre partie du guide à l'objectif 2.2.5.)

On aura $y = \pm x$ (où $x \geq 0$).

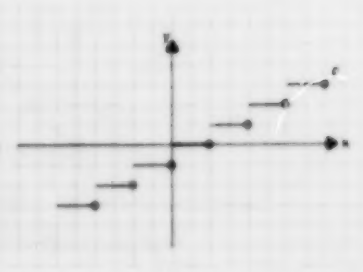


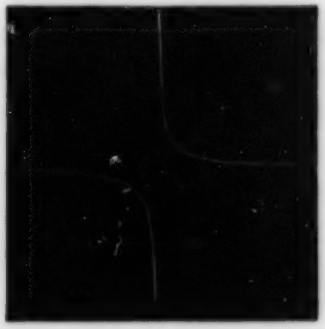
ÉTUDE DE LA FONCTION PARTIE ENTIÈRE.

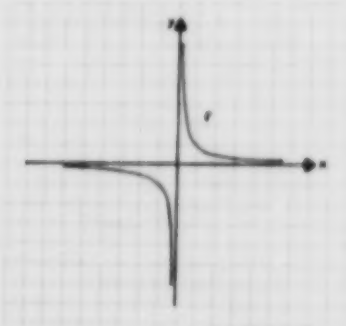
Objectifs atteints

2.2.5

TROUVER la réciproque d'une fonction valeur absolue, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.

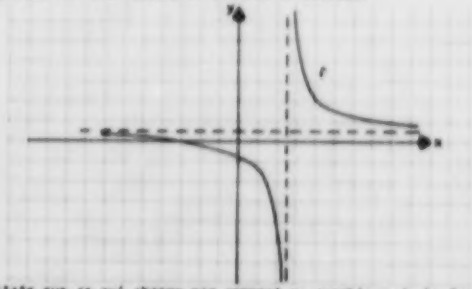
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
certaine fonction définie par f: x ⟼ [x].		
1. Sur une feuille quadrillée, trace le graphique de la trajectoire de l'OVNI.	- Le graphique devrait ressembler à celui-ci.  - Ici, il serait pertinent de faire discuter les élèves sur l'allure du graphique et de leur demander de trouver des situations de la vie courante où l'on peut trouver des graphiques semblables. Ex.: - tables d'impôts - tarifs de stationnement - etc.	2.2.1 TRACER le graphique cartésien d'une fonction valeur absolue, d'une fonction partie entière, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.
2. a) Quel est le domaine de cette fonction? b) Quelle est l'image de cette fonction?	- dom f = $\mathbb{R}$. - ima f = $\mathbb{Z}$. N.B.: L'étude de cette fonction se limite au tracé graphique, de même qu'à la recherche du domaine et de l'image de la fonction.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Mission accomplie, les informations recherchées ont été trouvées.		2.2.2 TROUVER le domaine et l'image d'une fonction valeur absolue, d'une fonction partie entière, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.
6e mission:	ÉTUDE DE LA FONCTION DE VARIATION INVERSE.	
Noirceur soudaine!		
Un de tes satellites s'est engouffré dans un trou noir. Tu dois le récupérer et cette délicate mission porte le nom de code de TROU NOIR.		
La raison de ce nom de code te sera fournie par l'étude d'une fonction particulière, soit la fonction définie par $f: x \mapsto \frac{1}{x}$.		

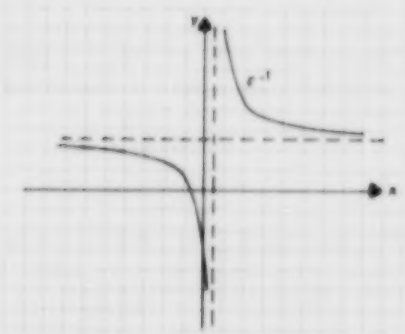
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
1- Sur une feuille quadrillée, trace le graphique cartésien de cette fonction.	- L'élève devra tracer un graphique semblable à celui-ci:  - Le nom de code de l'opération vient du fait que dans la fonction $\frac{1}{x}$, si x = 0, on dit algébriquement que c'est non défini et ici, graphiquement, on dit que l'on a un trou noir.	2.2.1 TRACER le graphique cartésien d'une fonction valeur absolue, d'une fonction partie entière, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
2. a) Quel est le domaine de cette fonction? b) Quelle est l'image de cette fonction?	- dom f = $\mathbb{R}^*$ - ima f = $\mathbb{R}^*$	2.2.2 TROUVER le domaine et l'image d'une fonction valeur absolue, d'une fonction partie entière, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.
3. Cette fonction est-elle croissante ou décroissante?	- Elle est décroissante dans chacun des 2 intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.	2.2.4 DÉTERMINER la croissance ou la décroissance, dans un intervalle donné, d'une fonction valeur absolue, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.
4. Quelle est l'équation de la réciproque de cette fonction? Si tu traces cette réciproque sur ta feuille quadrillée, que constates-tu?	- $y = \frac{1}{x}$ - $f^{-1} = f$	2.2.5 TROUVER la réciproque d'une fonction valeur absolue, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.

Peux-tu maintenant expliquer la raison du nom de code TROU NOIR ?

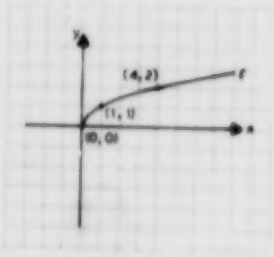
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
7e mission : Le trou noir se déplace. Soit la fonction définie par $f: x \mapsto \frac{x+3}{2x-5}$ (où $x \neq \frac{5}{2}$) 1. Sur une feuille quadrillée, trace le graphique cartésien de cette fonction.	ÉTUDE DE LA FONCTION RATIONNELLE [531] En effet, cette fonction est un cas général de la fonction inverse. On conseille donc, pour les groupes d'élèves plus forts (ceux qui font le 531), de considérer d'abord la fonction rationnelle $f: x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ (où $cx+d \neq 0$ et $c \neq 0$) pour ensuite prendre le cas particulier où $a = 0$ et $d = 0$ pour obtenir la fonction de variation inverse. Le graphique devrait ressembler à celui ci-dessous:  On constate que ce qui change par rapport au graphique de la fonction de variation inverse, c'est la position des <u>asymptotes</u>. Dans la fonction de variation inverse, les asymptotes sont les axes du plan cartésien tandis que dans la fonction rationnelle, l'asymptote verticale est toujours la droite d'équation $x = -\frac{d}{c}$ et l'asymptote horizontale est toujours la droite d'équation $y = \frac{a}{c}$.	2.2.1 TRACER le graphique cartésien d'une fonction valeur absolue, d'une fonction partie entière, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.

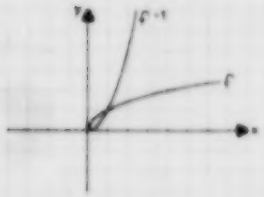
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
2. a) Quel est le domaine de cette fonction? b) Quelle est l'image de cette fonction?	- dom f = $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{2}\right\}$ - ima f = $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$	2.2.2 TROUVER le domaine et l'image d'une fonction valeur absolue, d'une fonction partie entière, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.
1. Cette fonction est-elle croissante ou décroissante?	- Elle est décroissante dans chacun des 2 intervalles suivants: $]-\infty, \frac{5}{2}[$ et $]\frac{5}{2}, +\infty[$	2.2.4 DÉTERMINER la croissance ou la décroissance, dans un intervalle donné, d'une fonction valeur absolue, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.

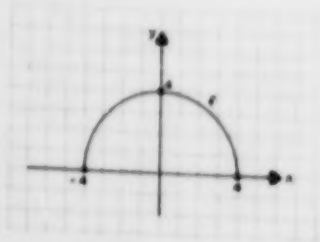


Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
4. Quelle est l'équation de la réciproque de cette fonction? Trace cette réciproque dans le plan cartésien. Tu devrais donc constater le déplacement du trou noir.	$y = \frac{2x + 3}{2x - 1}$ Les asymptotes ont été permutées et le graphique de f est symétrique à celui de f^{-1}, par rapport à la bissectrice des 1er et 3e quadrants.	2.2.5 TROUVER la réciproque d'une fonction valeur absolue, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.

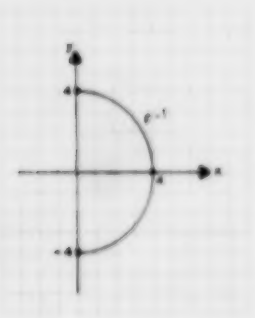
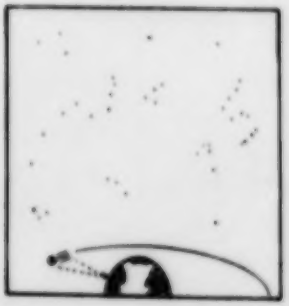
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
4e mission: Si tu n'interviens pas, une catastrophe va se produire! À cause d'une erreur technique, un de tes satellites de communication s'éloigne dangereusement de la Terre et il peut se perdre dans l'infinité de l'espace. Afin d'essayer de le récupérer, on te confie la mission d'étudier sa trajectoire ainsi que différentes autres données. Le nom de code de l'opération est CONFIN.	ÉTUDE DE LA FONCTION RACINE CARRÉE N.B.: La mise en situation présente ici la fonction racine carrée non translatée. Cependant, vous devrez aussi présenter cette fonction dans sa forme translatée soit horizontalement, soit verticalement, ou encore dans les 2 sens. Exemples: 1) $f: x \mapsto -\sqrt{x}$ 2) $f: x \mapsto \sqrt{x+1}$ 3) $f: x \mapsto \sqrt{x} - 2$ 4) $f: x \mapsto \sqrt{2x-4}$	
1. On te dit que la trajectoire du satellite a une représentation graphique correspondant à celle de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x}$. Sur une feuille quadrillée, trace la courbe de cette fonction.	- L'élève utilise la technique point par point. Il devrait obtenir le graphique suivant:	

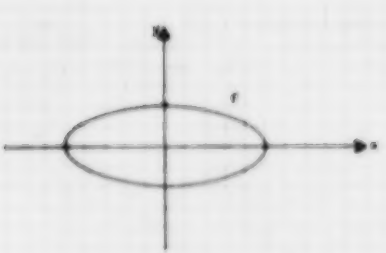
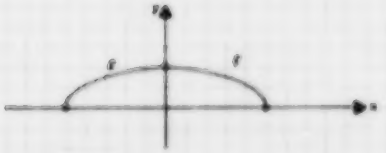
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
		2.2.1 TRACER le graphique cartésien d'une fonction valeur absolue, d'une fonction partie entière, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.
2. a) Quel est le domaine de cette fonction? b) Quelle est l'image de cette fonction?	- dom f = $\mathbb{R}_+$ ou $[0, +\infty[$ - ima f = $\mathbb{R}_+$ ou $[0, +\infty[$	2.2.2 TROUVER le domaine et l'image d'une fonction valeur absolue, d'une fonction partie entière, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.
3. a) Y a-t-il un maximum ou un minimum pour cette fonction? b) Quelle est sa valeur?	- Il y a un minimum. - Ce minimum est 0.	2.2.3 DÉTERMINER le maximum ou le minimum d'une fonction valeur absolue, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
4. Dans quel intervalle cette fonction est-elle croissante? 5. Trouve l'équation de la réciproque de cette fonction et illustre-la sur ton graphique. Malheureusement, tu constates que selon la trajectoire amorcée tu ne peux le récupérer.	- Dans $[0, +\infty[$ - On a $y = x^2$ (où $x \geq 0$) et graphiquement on a:  - faire remarquer que la courbe de f^{-1} est symétrique de la courbe de f, par rapport à la bissectrice des 1^{er} et 3^{e} quadrants.	2.2.4 DÉTERMINER la croissance ou la décroissance, dans un intervalle donné, d'une fonction valeur absolue, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse. 2.2.5 TROUVER la réciproque d'une fonction valeur absolue, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.

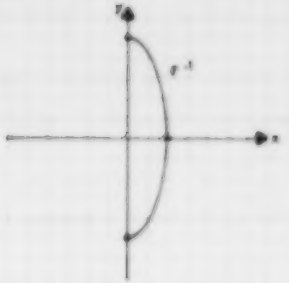
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
9e mission:	ÉTUDE DE LA FONCTION DEMI-CERCLE 531	
Une erreur humaine peut provoquer un grave accident.		
Le centre de la NASA vient de constater qu'elle vient de lancer un satellite sur le même orbite que celui de l'U.R.S.S. et allant à la rencontre de ce dernier. Afin d'éviter la collision, l'opération CORRECTION est déclenchée.	$f: x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$, où r est le rayon du cercle.	
En analysant la trajectoire d'un des satellites, on te dit qu'il suit une courbe définie par la fonction $f: x \mapsto \sqrt{16 - x^2}$		
1. Sur une feuille quadrillée, trace le graphique cartésien de cette fonction.	- En voici le résultat: 	2.2.1 TRACER le graphique cartésien d'une fonction valeur absolue, d'une fonction partie entière, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
2. a) Quel est le domaine de cette fonction? b) Quelle est l'image ce cette fonction?	- dom f = [-4, 4]. - ima f = [0, 4]. d'une façon générale: dom = [-r, r] et ima = [0, r] ou [-r, 0]	2.2.2 TROUVER le domaine et l'image d'une fonction valeur absolue, d'une fonction partie entière, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.
3. a) Quel est le maximum de cette fonction? b) Quel est le minimum de cette fonction?	- max f = 4. - min f = 0.	2.2.3 DÉTERMINER le maximum ou le minimum d'une fonction valeur absolue, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.
4. a) Dans quel intervalle cette fonction est-elle croissante? b) Dans quel intervalle cette fonction est-elle décroissante?	- Elle est croissante dans [-4, 0]. - Elle est décroissante dans [0, 4].	2.2.4 DÉTERMINER la croissance ou la décroissance, dans un intervalle donné, d'une fonction valeur absolue, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
5. Quelle est l'équation de la réciproque de cette fonction? Trace cette réciproque dans le plan cartésien. Suggère une solution afin d'éviter la collision.	. $y = -\sqrt{16 - x^2}$ où $x \geq 0$.  	2.2.5 TROUVER la réciproque d'une fonction valeur absolue, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.
10e mission: On avise la NASA qu'une comète nous visite. Ta mission est de récolter le plus d'informations possible sur cette comète jusqu'à présent inconnue. Le nom de code de cette opération est HALLÉ. Une première analyse permet d'identifier sa trajectoire; elle est donnée par la relation définie par	ÉTUDE DE LA FONCTION DEMI-ELLIPSE. 531 	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 25y^2 = 100\}$.		
1. Sur une feuille quadrillée, trace le graphique cartésien de cette relation.		
2. Tu constates que sa trajectoire elliptique n'est pas fonctionnelle. Si on veut ne conserver que la demi-ellipse supérieure, quelle est l'équation de cette fonction? Trace son graphique cartésien.	 - L'équation de f est $y = \frac{2}{5}\sqrt{25 - x^2}$.	2.2.1 TRACER le graphique cartésien d'une fonction valeur absolue, d'une fonction partie entière, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
2. a) Quel est le domaine de cette fonction? b) Quelle est l'image de cette fonction?	- dom f = [-5, 5]. - im f = [0, 2]. d'une façon générale : dom = [-a, a] et im = [0, b] ou [-b, 0]	2.2.2 TROUVER le domaine et l'image d'une fonction valeur absolue, d'une fonction partie entière, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.
3. a) Quel est le maximum de cette fonction? b) Quel est le minimum de cette fonction?	- max f = 2. - min f = 0.	2.2.3 DÉTERMINER le maximum ou le minimum d'une fonction valeur absolue, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.
4. a) Dans quel intervalle cette fonction est-elle croissante? b) Dans quel intervalle cette fonction est-elle décroissante?	- Elle est croissante dans [-5, 0]. - Elle est décroissante dans [0, 5].	2.2.4 DÉTERMINER la croissance ou la décroissance, dans un intervalle donné, d'une fonction valeur absolue, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
5. Quelle est l'équation de la réciproque de cette fonction? Trace le graphique cartésien de cette réciproque. La NASA est satisfaite des renseignements que tu as obtenus. 11e mission: On suffoque et on s'enroule! Un "séisme" spatial t'entraîne dans un stion. Pour pouvoir résoudre cette énigme, il faut d'abord comprendre où va se retrouver le satellite dans sa course folle. Par l'opération connue sous le nom de code SPIROGRAPHE, tu as découvert que le satellite a suivi un trajet	. $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{A^2 - x^2}$ où $x \geq 0$. -  ÉTUDE DE LA COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS. Ici, l'étude de la composée de deux fonctions se limite à faire visualiser et à faire comprendre l'effet de cette composée.	2.2.5 TROUVER la réciproque d'une fonction valeur absolue, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
donné par le composée (g ∘ f) des fonctions f et g respectivement déterminées par $f: x \mapsto x + 1$ et $g: x \mapsto x^2 - 2$		
1. Trouve algébriquement le composée g ∘ f de ces 2 fonctions.	- Voir l'autre section du guide à l'objectif 2.1.12. - Rappeler que g ∘ f se lit "f suivie de g". - $g \circ f: x \mapsto x^2 + 2x - 2$.	2.1.12 TROUVER le composée de deux fonctions polynomiales.
2. Trace, dans le plan cartésien, cette composée.	- L'élève devrait tracer le graphique suivant:	2.2.8 TROUVER la composée de deux fonctions réelles.
Le calcul n'est pas si tragique maintenant qu'on connaît la trajectoire finale du satellite.		

OBJECTIF TERMINAL N°: 2.3 RÉSOUDRE DES PROBLÈMES SE TRADUISANT PAR DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

INTRODUCTION

La trigonométrie, probablement plus que n'importe quelle autre branche des mathématiques, est née d'un constant et fertile jeu de l'offre et de la demande.

"Je te donne à manger; tu aimes cela; tu en redemandes et même beaucoup plus et du meilleur!"

"L'offre de théories et de techniques mathématiques applicables n'importe quand et les demandes incessantes d'une science appliquée en plein développement et en plein essor, l'astronomie!"

Au début, cette interaction et ces liens entre la théorie et la pratique eurent également lieu entre l'analyse numérique et la géométrie. L'utilisation de variables pour désigner certaines opérations s'appliquant à des classes spécifiques d'objets joue un rôle essentiel dans le développement de la trigonométrie, même si le symbolisme utilisé aujourd'hui et portant l'empreinte de l'algèbre ne fut introduit qu'au 16^{e} siècle.

Les débuts du développement de la trigonométrie se perdent dans la préhistoire. La première relation utilisait diverses séquences numériques, qui liaient la longueur des ombres d'un bâton avec l'heure du jour; ce fut l'époque d'Hipparque. La trigonométrie était basée sur une simple fonction, soit la corde correspondant à un arc circulaire de longueur arbitraire.

Ces premiers développements furent en général effectués par des Grecs au 2^{e} siècle de notre ère. Par la suite, le centre de ce développement se déplaça aux Indes (où le concept de corde évolua vers diverses variétés de sinus), et ensuite en Asie centrale.

Du 9^{e} au 15^{e} siècle, la nouvelle fonction "sinus" et l'ancienne fonction reliée à l'ombre du gnomon (tangente, cotangente, sécante) furent élaborées et compilées en système sexagésimal. De ces développements émergea la trigonométrie moderne, ou du moins ses principes de base.

En même temps que se déplaçait le centre de l'activité astronomique vers l'Europe, il en fut de même de la trigonométrie. La compilation, et le calcul des tables, ainsi que la découverte des différentes relations fonctionnelles entre les divers éléments d'un triangle, se poursuivit en Europe. Une des plus importantes contributions de l'Europe fut le remplacement des règles verbales par les symboles appropriés. Mais l'invention du calcul infinitésimal permit d'élever la trigonométrie au rang de "branche croissante des mathématiques".

À la fin du 18e siècle, Léonard Euler avait symbolisé et classé tous les théorèmes et les corollaires de cette théorie complexe des fonctions trigonométriques. Par la suite, à l'école, spécialement utile aux navigateurs et aux arpenteurs, la trigonométrie possédait sa propre identité.

Le développement accéléré de la trigonométrie est un exemple frappant du fait que les connaissances nouvelles tendent à s'accumuler au même rythme que celles que l'on possède déjà. En somme, sa croissance est exponentielle en fonction du temps.

C'est une suite d'histoires dont les longueurs sont souvent truffées de conjonctures fort incertaines. À partir d'un fait bien occasionnel. Plus tard, et plus près de notre ère, on peut percevoir des histoires plus courtes et remplies de faits beaucoup plus précis et certains, vraiment, l'abondance des textes historiques constitue souvent une grande difficulté, car la plupart des faits ne peuvent pas être utilisés. Ainsi, ce qui en résulte (de pertinent) donne une impression de simplicité, de continuité et de rationalisme, ce qui la plupart du temps est parfaitement illusoire. Ceux qui racontent les faits n'en connaissent pas toutes les dimensions, et la complexité de ces faits nous oblige à douter des textes qui nous sont parvenus.

Par exemple:

"Si on pense à ceux qui ont établi les bases de la trigonométrie, ils n'auraient pu rien faire si leurs prédécesseurs n'avaient pas défriché le terrain et établi la toile de fond. De plus, la connaissance d'un sujet donné n'est pas instantanée. Elle progresse lentement et souvent par une suite désordonnée de sauts dans le temps. Des pas importants sont parfois franchis en

peu de temps, des découvertes importantes disparaissent parfois sans laisser de traces, pour finalement être redécouvertes plus tard, parfois beaucoup plus tard!"

Trois catégories de personnes furent historiquement confrontées à des situations qui, sous plusieurs aspects, sont fortement analogues:

a) La première catégorie est celle de l'INVENTEUR original d'un théorème ou d'une technique quelconque, il résout ses problèmes à l'aide des outils mathématiques dont il a hérité de ses prédécesseurs, mais lentement ou très subitement, il découvre des solutions plus puissantes pour ces vieux problèmes ou il pose de nouveaux problèmes et de nouveaux défis.

b) La seconde catégorie est celle de l'HISTORIEN, qui cherche, recherche, s'emmêle, s'empêtre, pour retrouver à travers les textes et les productions des inventeurs, la pensée et le cheminement de l'inventeur.

c) La troisième catégorie est celle de l'ÉLÈVE, pour lequel un problème donné est aussi nouveau que s'il était le premier à le considérer.

Les personnes appartenant à chacune de ces trois catégories partagent, à des degrés divers, la capacité d'imposer à l'histoire leurs propres recherches et leurs propres découvertes.

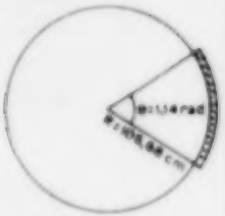
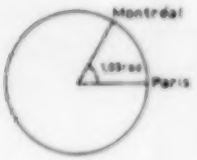
En fait, l'historien et l'élève peuvent gagner beaucoup à comprendre ce que l'inventeur a réalisé.

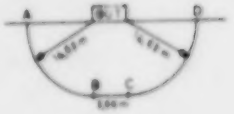
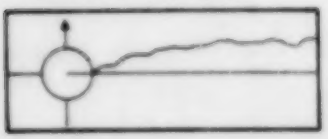
N.B.: En annexe, on retrouvera les grandes lignes du développement de cette branche à travers l'histoire.

OBJECTIF TERMINAL N°: 2.3 RÉSOUDRE des problèmes se traduisant par des fonctions trigonométriques.

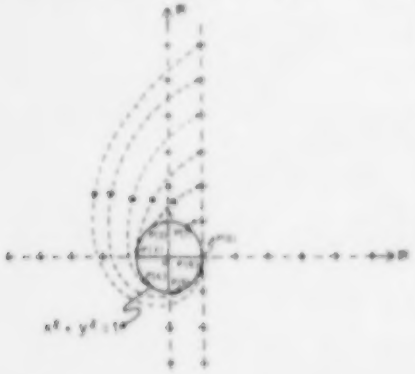
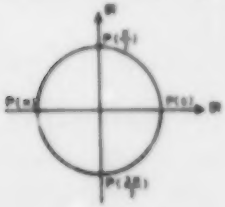
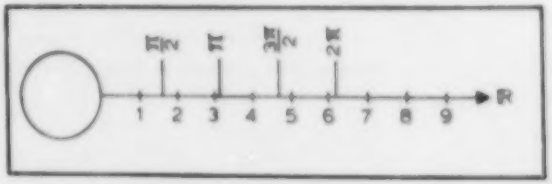
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Bloc 1	- Les situations d'apprentissage proposées dans cette partie permettront aux élèves d'acquérir les connaissances et de développer les habiletés reliées aux objectifs intermédiaires 2.3.1 et 2.3.2. • TRANSFORMER des degrés en radians et vice versa. • DÉTERMINER la relation entre la mesure d'un angle et celle de l'arc ou des arcs interceptés par cet angle. - Présenter le problème suivant aux élèves, en soulignant que les situations d'apprentissage proposées permettront de le résoudre. "On est en train de préparer le terrain pour le lancer du poids à la polyvalente La Seigneurie, pour les jeux annuels. Voici le schéma de l'aire de lancement: On doit y installer un rebord de bois (planche d'arrêt), pour empêcher les athlètes de dépasser le cercle au moment du lancer. Ce rebord de bois a 11,43 cm de large. L'angle θ formé par les extrémités de cette pièce de bois est de 1,14 rad. Le rayon intérieur est de 108,68 cm.	

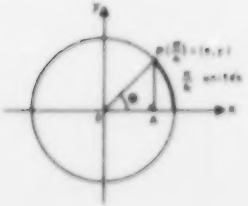
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
1.1 La mesure des angles Des segments, des demi-droites, des droites et des sur une calculatrice? Le cercle Trace un cercle de centre O dans la plan cartésien. Qu'est-ce qu'un degré? Le radian Dans un cercle, combien y a-t-il de radians?	Quelle sont donc la longueur intérieure et extérieure de cette planche d'arrêt? - Pour l'étude des fonctions trigonométriques, on utilise de préférence les degrés dans la résolution des triangles et les radians dans tous les autres cas. - Expliquer aux élèves les notions de degré, d'angle au centre, de sens positif d'un angle et de sens négatif d'un angle. - Faire tracer différents angles en tenant compte qu'on mesure toujours un angle à partir de la direction positive de l'axe des x (axe horizontal). Un côté est donc l'axe initial, et l'autre côté est appelé côté terminal. - Insister de l'importance pour parler de la périphérie que l'on retrouve dans un cercle et de son lien avec les angles. - Utiliser le cercle de rayon 1 trigo de la figure ci-contre. - Faire identifier et tracer plusieurs angles équivalents en tenant de	2.3.1 Transformer des degrés en radians et vice versa

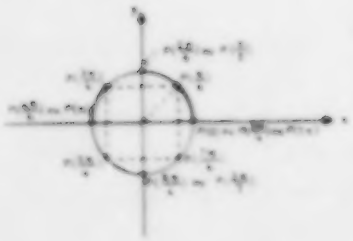
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
1.2 Relation entre degré et radian Que vaut 1^0 en radians? Que vaut 1 rad en degrés?	- Discuter avec les élèves des questions posées et ensuite, expliquer la relation entre degré et radian. - Revenir au problème de départ afin de faire constater que l'angle est exprimé en radians. Demander aux élèves d'exprimer cet angle en degrés. 	2.3.1 TRANSFORMER des degrés en radians et vice versa.
1.3 La mesure d'une longueur d'arc En utilisant les proportions, quelle peut être la longueur intérieure et extérieure de la planche d'arrêt?	- Rappeler les notions de circonférence et d'angle au centre. - Expliquer la relation entre la mesure d'un angle et celle de l'arc ou des arcs interceptés par cet angle: Longueur $\widehat{AB} = \frac{2\pi r\theta^0}{360^0}$ (θ: angle au centre en degrés) Longueur $\widehat{AB} = r\theta$ (θ: angle au centre en radians) - Faire résoudre d'autres problèmes: Déterminer le rayon terrestre, si la distance séparant Montréal de Paris est de 6576 km et l'angle au centre de la terre, de 1,03 rad. 	2.3.2 DÉTERMINER la relation entre la mesure d'un angle et celle de l'arc ou des arcs interceptés par cet angle.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	voici le dessin de la zone des buts au hockey sur gazon. On doit installer un ruban qui part de A et se rend à D, en passant par B et C. Quelle sera la longueur de ce ruban?  	2.3.2 DÉTERMINER la relation entre la mesure d'un angle et celle de l'arc ou des arcs interceptés par cet angle. (suite)
Bloc 2	- Les situations d'apprentissage proposées dans cette partie permettront aux élèves d'acquérir les connaissances et de développer les habiletés reliées aux objectifs intermédiaires 2.3.3, 2.3.4 et 2.3.5. • DÉFINIR la fonction d'enroulement sur un cercle centré à l'origine de rayon un. • TROUVER le domaine et l'image de la fonction d'enroulement. • DÉTERMINER les propriétés de la fonction d'enroulement.	
2.1 Le construction du trigonographe	- Avant d'aborder cette situation d'apprentissage, il importe de s'assurer que les élèves auront le matériel nécessaire.	
Construis un trigonographe  en tenant compte des directives suivantes: - colle un objet circulaire (carton épais,	- Ce trigonographe servira à présenter et à exploiter la fonction d'enroulement, et plus tard, il servira à tracer les courbes des fonctions sinus et tangente.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
disque en bois, etc.) sur un carton épais et rigide (ou une pièce de bois assez mince); EXEMPLE : un carton épais de 10 cm sur 30 cm et disque de 5 cm de diamètre. - fixe sur le carton épais et sous le disque (ou contre du disque) une ficelle rigide (non élastique) ou un fil de métal d'une longueur d'au moins 8 fois le diamètre du disque; - apporte en classe un crayon feutre rouge et un crayon feutre noir (pointe fine). ① En prenant pour acquis que le cercle est unitaire (cercle trigonométrique), reporte la longueur du rayon sur la droite des réels. ② Gradue la ficelle en longueur de rayons (de 1 à 7). Enroule ensuite la ficelle (dans le sens positif) autour du disque et vérifie, en marquant d'un point les longueurs de rayons obtenues sur le cercle.	- Faire à nouveau constater aux élèves qu'il y a un peu plus de 6 fois le rayon autour du cercle et amener les élèves à déduire que cela correspond à 2π.	

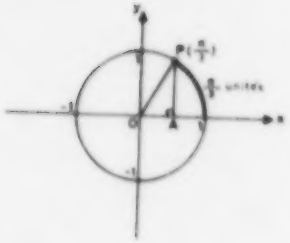
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	- Montrer que la droite numérique qui est tangente au point (1, 0) est flexible et peut s'enrouler autour du cercle-unité comme un fil autour d'une bobine. 	
① Enroule la ficelle, fais une marque en bleu sur cette ficelle à 2π et reporte cette longueur sur la droite des réels. Fais de même avec π, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. 	- On doit s'assurer que l'élève peut graduer sa droite de la façon habituelle et en terme de π. 	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
2.2 La fonction d'enroulement Etant donné qu'à chaque nombre réel correspond un point trigonométrique, situe les points suivants sur le cercle trigonométrique: a) P(2) b) P(7) c) P(-4) d) P(2π/3) e) P(-7π/4) f) ...	- Décrire la fonction d'enroulement aux élèves en la faisant visualiser sur le trigonographe. - Définir ce qu'est un point trigonométrique et mentionner que tout point trigonométrique doit vérifier l'équation du cercle $x^2 + y^2 = 1$. - Cette habileté est évidemment préalable à la recherche des coordonnées de différents points trigonométriques.	2.3.3 DÉFINIR la fonction d'enroulement sur un cercle centré à l'origine de rayon un.
2.3 Les coordonnées de P(π/4), P(π/3), P(π/6) et de leurs multiples Tu connais déjà les coordonnées de: P(0) = (1, 0) P(π/2) = (0, 1) P(π) = (-1, 0) P(3π/2) = (0, -1) P(2π) = (1, 0) ① Comment peux-tu calculer les coordonnées du point P(π/4)? 	- Montrer que, dans ce cas, la mesure de l'angle θ est égale à 45° et que, par conséquent, le triangle OAP est un triangle rectangle isocèle. Les deux coordonnées x et y sont donc égales. En utilisant la relation de Pythagore (ou l'équation du cercle trigonométrique) on a:	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	$x^2 + y^2 = 1$ $x^2 + x^2 = 1$ (car $x = y$) $2x^2 = 1$ $x^2 = \frac{1}{2}$ $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ donc $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (car $x = y$) Donc, dans le premier quadrant, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, les coordonnées de $P(\frac{\pi}{4})$ sont $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.	
Situer maintenant les points $P_{\frac{\pi}{4}}$ sur le cercle trigonométrique 	- Profiter de l'occasion pour faire placer des points sur le trigonographe. - Faire remarquer que dans l'expression $P(x + \frac{2\pi}{4})$, x est un nombre entier ($x \in \mathbb{Z}$).	
Dans les coordonnées de ces points, vérifient que : - l'image d'un point (x, y) par la réflexion d'axe y est $(-x, y)$; - l'image d'un point (x, y) par la réflexion d'axe x est $(x, -y)$.	- On peut profiter de cette activité pour introduire la périodicité de la fonction d'enroulement.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

② Quelles sont les coordonnées de $P(\pi/3)$?



Pour les besoins du présent document et pour éviter de surcharger inutilement les différents énoncés, démonstrations et opérations, on évite d'utiliser le symbole "mes". Il est évident qu'il doit en être autrement avec les élèves.

- On sait que: $2\pi/6 = \pi/3$, la circonférence est séparée en 6 parties égales et $\pi/3 = 60^0$.

$\triangle OAP$ est rectangle en A

$\angle O = 60^0$

$\angle P = 30^0$

$\overline{OP} = 1$ (rayon)

$\overline{OA} = 1/2 = 1/2$ du rayon

(dans un triangle rectangle, le côté opposé à un angle de 30^0 est congruent à la moitié de l'hypoténuse).

Par la relation de Pythagore, on trouve que:

$(\overline{OA})^2 + (\overline{AP})^2 = (\overline{OP})^2$

$(1/2)^2 + y^2 = 1$

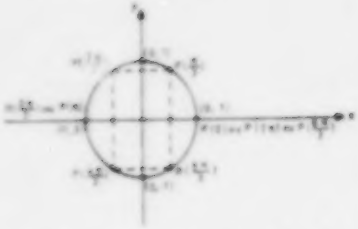
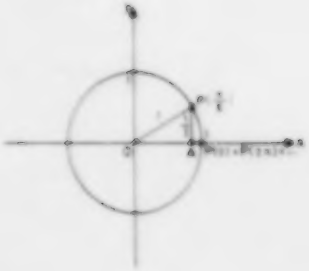
$1/4 + y^2 = 1$

$y^2 = 1 - 1/4$

$y^2 = 3/4$

$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Dans le 1er quadrant, $x > 0$ et $y > 0$.)

Les coordonnées de $P(\frac{\pi}{3})$ sont donc $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Situe maintenant les points $P(n-\frac{\pi}{3})$ sur le cercle trigonométrique. 		
Déduis les coordonnées de ces points en utilisant les réflexions d'axe x et d'axe y.	- Revenir au trigonographe pour faire placer des nouveaux points.	
③ Quelles sont les coordonnées de $P(\pi/6)$? 	- En comparant avec la situation précédente, l'élève devrait être en mesure de répondre à la question posée. ΔOAP est rectangle en A $\angle O = 30^0$ $\angle P = 60^0$ $\overline{OP} = 1$ (c'est le rayon) $\overline{AP} = 1/2$ (c'est la moitié du rayon) Par la relation de Pythagore, on trouve que: $(\overline{OA})^2 + (\overline{AP})^2 = (\overline{OP})^2$ $x^2 + (1/2)^2 = 1$ $x^2 = 1 - 1/4$ $x^2 = 3/4$ $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Dans le 1er quadrant, x > 0 et y > 0.)	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

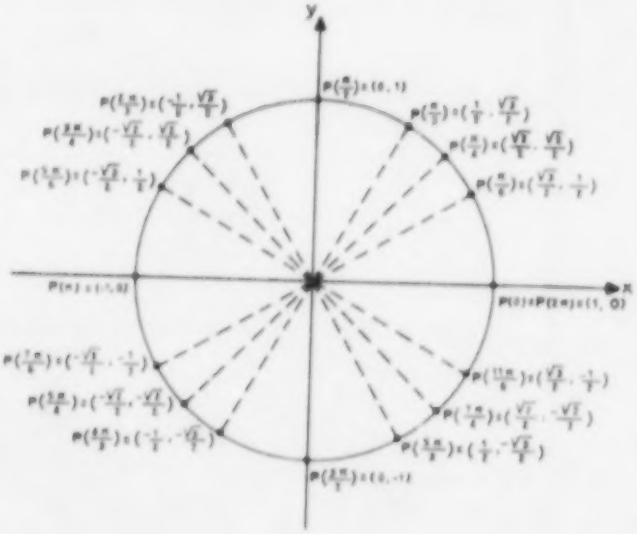
Situe maintenant les points $P(n \cdot \frac{\pi}{6})$ sur le cercle trigonométrique.

Déduis les coordonnées de ces points en utilisant les réflexions d'axe x et d'axe y.

Les coordonnées de P(π/6) sont donc $(\sqrt{3}/2, 1/2)$.

- Terminer la construction du trigonographe.

- En guise de synthèse, demander à l'élève de construire son cercle trigonométrique en y plaçant les valeurs calculées précédemment:



Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

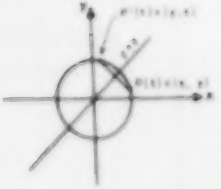
2.4 Les propriétés de la fonction d'enroulement

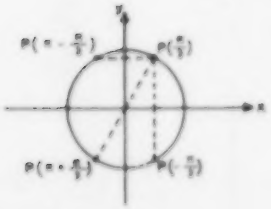
- Rappeler aux élèves les propriétés reliées à la symétrie dans le cercle et faire constater la véracité de ces relations à l'aide du cercle trigonométrique.

a) P(t) = (x, y) est symétrique par rapport à l'axe des y (x = 0), ainsi P'(t) = (-x, y).

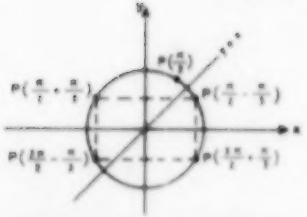
b) P(t) = (x, y) est symétrique par rapport à l'axe des x (y = 0), ainsi P'(t) = (x, -y).

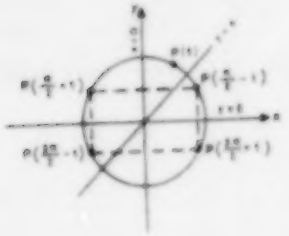
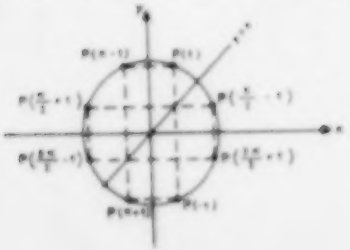
c) P(t) = (x, y) est symétrique par rapport à l'origine (0, 0), ainsi P'(t) = (-x, -y).



Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	d) $P(t) = (x, y)$ est symétrique par rapport à la bissectrice: $x = y$, ainsi $P'(t) = (y, x)$.	
	- Ces constatations permettent de dégager certaines relations qui seront utiles dans l'évaluation des fonctions trigonométriques.	
	Exemples:	
	Si $P(t) = (x, y)$, alors $P(t + \frac{\pi}{2}) = (-y, x)$.	
	Si $P(t) = (x, y)$, alors $P(t + \frac{3\pi}{2}) = (y, -x)$.	
	Si $P(t) = (x, y)$, alors $P(t + 2\pi) = (x, y)$.	
	...	
a) Soit $P(\frac{\pi}{3})$, où est situé $P(\pi + \frac{\pi}{3})$ $P(\pi - \frac{\pi}{3})$ $P(-\frac{\pi}{3})$? 		

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Quelles sont les coordonnées de chacun des points trouvés? Quelles symétries retrouve-t-on ici?	$P(\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ $P(\pi + \frac{\pi}{3}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ — Symétrie par rapport à l'origine $P(\pi - \frac{\pi}{3}) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ — Symétrie par rapport à l'axe des y $P(-\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ — Symétrie par rapport à l'axe des x	
b) Soit P(t), un point quelconque situé dans le quadrant où est situé $P(\pi + t)$ $P(\pi - t)$ $P(-t)$? $0 < t < \frac{\pi}{2}$ Quelles sont les coordonnées de ces points?	$P(t) = (x, y)$ $P(\pi + t) = (-x, -y)$ $P(\pi - t) = (-x, y)$ $P(-t) = (x, -y)$	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
c) Soit $P(\frac{\pi}{3})$, où est situé $P(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$ $P(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$ $P(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$ $P(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$?  Quelles sont les coordonnées des points trouvés? Quelles symétries retrouve-t-on ici? d) Soit P(t), un point quelconque situé dans le premier quadrant: où est situé $P(\frac{\pi}{2} - t)$ $P(\frac{\pi}{2} + t)$ $P(\frac{3\pi}{2} + t)$ $P(\frac{3\pi}{2} - t)$?	$P(\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ $P(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ $P(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ $P(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ $P(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
 Quelles sont les coordonnées de chacun des points trouvés?	Si P(t) = (x, y), les coordonnées de $P(\frac{\pi}{2} - t)$ sont (y, x) $P(\frac{\pi}{2} + t)$ sont (-y, x) $P(\frac{3\pi}{2} + t)$ sont (y, -x) $P(\frac{3\pi}{2} - t)$ sont (-y, -x). - Pour terminer cette activité, il serait peut-être intéressant de demander à l'élève de résumer le tout sur un seul graphique. 	2.3.6 DÉTERMINER les propriétés de la fonction d'enroulement.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	$P(\pi + t) =$ $P(-t) =$ $P(\pi - t) =$ $P(\frac{\pi}{2} - t) =$ $P(\frac{\pi}{2} + t) =$ $P(\frac{3\pi}{2} - t) =$ $P(\frac{3\pi}{2} + t) =$ *Si $P(t) = (x, y)$ alors ...*	
2.5 <u>Domaine et image de la fonction d'enroulement</u> Quel est le domaine et quelle est l'image de la fonction d'enroulement P?	- faire constater à l'élève que le domaine de cette fonction P est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, car tout nombre réel a son correspondant sur le cercle trigonométrique. $\text{dom } P = \mathbb{R}$ faire constater à l'élève que l'image de cette fonction P est l'ensemble de tous les points (couples) situés sur le cercle trigonométrique. $\text{im } P = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$	2.3.4 TROUVER le domaine et l'image de la fonction d'enroulement.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Bloc 3	- Les situations d'apprentissage proposées dans cette partie permettront aux élèves d'acquérir les connaissances et de développer les habiletés reliées à l'objectif intermédiaire 2.3.1	
	- DÉFINIR les fonctions sinus, cosinus et tangente.	
3.1 Un peu d'histoire	- Utiliser les notes historiques pour montrer l'origine des fonctions trigonométriques:	
	a) Montrer l'origine de la fonction sinus, en insistant sur l'importance historique de la fonction demi-corde.	

rd θ = $\overline{CB}$

$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\overline{CB}}{r}$

Si $r = 1$,

alors $\sin \frac{\theta}{2} = \overline{CB}$

Montrer que le rapport $\frac{\overline{CB}}{r}$ ne change pas, peu importe la valeur de r.

- Si $r = 1$, $\overline{AB}^2 = r^2 + r^2$
  $\overline{AB}^2 = 1 + 1$
  $\overline{AB}^2 = 2$
  $\overline{AB} = 1,4142407$
  et $\frac{\overline{AB}}{r} = 1,4142136$

- Si $r = 8$, $\overline{AB}^2 = 8^2 + 8^2$
  $\overline{AB}^2 = 64 + 64$
  $\overline{AB}^2 = 128$
  $\overline{AB} = 11,313709$
  et $\frac{\overline{AB}}{r} = 1,4142136$

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

Par conséquent, la valeur de la demi-corde (sinus) est constante.

- Si $r = 3$, $\overline{SR} = ?$

et $\frac{\overline{SR}}{3} = 1$

- Si $r = 8$, $\overline{SR} = 8$

$\frac{\overline{SR}}{8} = 1$

Le sinus correspond donc à la mesure de la demi-corde sur la mesure du rayon.

Pour un angle α, si $\text{cord } \alpha = t$,

alors $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{t}{2r}$

$r = 1$, alors $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{t}{2}$

b) Présenter la deuxième fonction qui fut inventée: "le sinus du complément".

Historiquement le "sinus du complément" est devenu le "cosinus" et $\sin (90^\circ - \alpha)$ est devenu $\cos \alpha$.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

Ex.: Si $x = 60°$, alors $\sin(90° - 60°) = \cos 60°$

d'où $\sin 30° = \cos 60°$

Si $r = 1$, $\overline{AB} = \sin x$ et $\overline{OB} = \cos x$

c) Finalement, introduire la tangente.

En l'an 1550 av. J.-C., en Égypte, on parlait de la longueur du gnomon, une espèce de bâton planté à la verticale dans le sol et dont la longueur demeurait fixe. Le gnomon permettait de calculer la hauteur des pyramides.

Le premier à constater des relations intéressantes fut Ahmes. Il parla de la SEQT d'un angle.

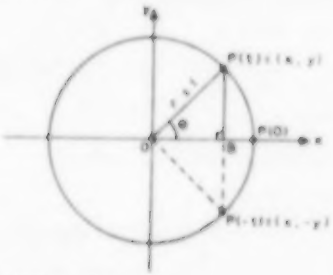
Certains historiens croient que ce symbole signifiait "rapports", d'autres parlent de cotangente.

Une chose est certaine, les rapports utilisés permettent de conclure que le concept de tangente venait de naître.

C'est en fait Thalès qui énonça clairement ces rapports.

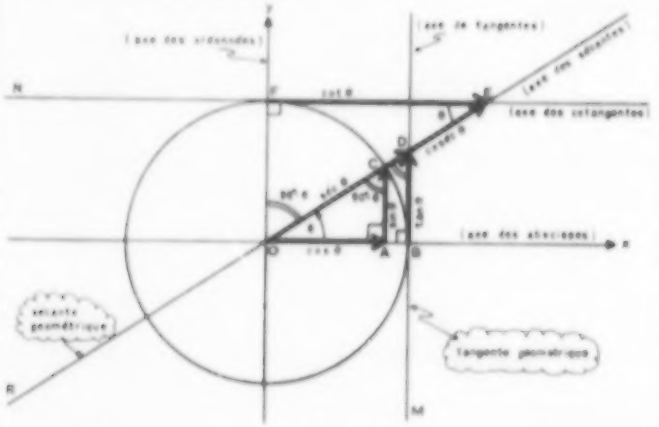
$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}}$ → *Cet énoncé d'égalité de rapports nous suggère l'idée de tangente.*

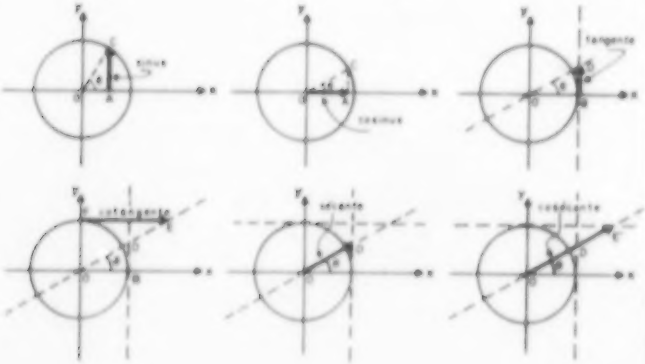
Thalès constata que, s'il faisait varier la longueur du bâton ou la distance du bâton à la pyramide, l'angle θ variait automatiquement.

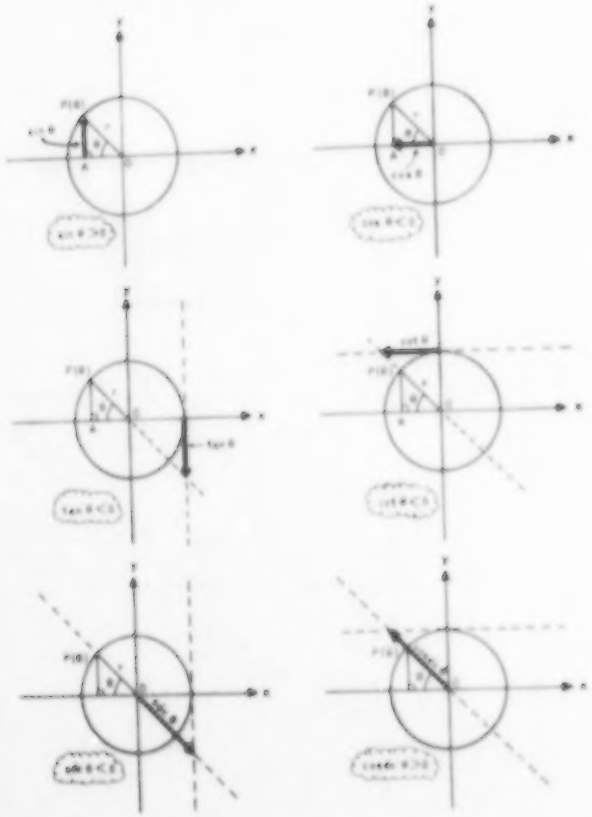
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	Faire constater, à partir de la figure ci-dessous, que le rapport $\frac{AB}{OB}$ est égal à $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$.	
3.2 La fonction d'enroulement et les fonctions trigonométriques	- Présenter les fonctions trigonométriques à partir d'un point P(t) du cercle trigonométrique. 	
	a) La fonction SINUS, notée sin sin: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $t \longmapsto \sin t$ = ordonnée du point P(t)	
	b) La fonction COSINUS, notée cos cos: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $t \longmapsto \cos t$ = abscisse du point P(t)	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	c) La fonction TANGENTE, notée tan $\tan: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $t \mapsto \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\text{ordonnée de } P(t)}{\text{abscisse de } P(t)} = \frac{y}{x}$ $\cos t \neq 0 \qquad x \neq 0$ d) La fonction COTANGENTE, notée cot $\cot: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $t \mapsto \cot t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\text{abscisse de } P(t)}{\text{ordonnée de } P(t)} = \frac{x}{y}$ $\sin t \neq 0 \qquad y \neq 0$ e) La fonction SÉCANTE, notée sec $\sec: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $t \mapsto \sec t = \frac{1}{\cos t} = \frac{1}{\text{abscisse de } P(t)} = \frac{1}{x}$ $\cos t \neq 0 \qquad x \neq 0$ f) La fonction COSÉCANTE, notée csc $\csc: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $t \mapsto \csc t = \frac{1}{\sin t} = \frac{1}{\text{ordonnée de } P(t)} = \frac{1}{y}$ $\sin t \neq 0 \qquad y \neq 0$	
3.3 Les fonctions trigonométriques à partir du triangle rectangle	En quatrième secondaire, les élèves ont appris à utiliser les fonctions trigonométriques à partir du triangle rectangle. Il serait donc avantageux d'en faire le parallèle avec les définitions précédentes.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
3.4 Définition des fonctions trigonométriques à partir de segments orientés	- Afin de mieux faire intégrer les fonctions trigonométriques, montrer les segments orientés représentant chacune d'elles. a) Dans le premier quadrant:	





Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Trouve les segments orientés représentant chaque fonction dans les autres quadrants et détermine le signe de chacune.	b) Dans le deuxième quadrant en insistant sur le signe des fonctions: 	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
À l'aide des définitions précédentes, surtout à partir de la fonction d'enroulement, détermine la valeur de chaque fonction trigonométrique des points du trigonographe ou du cercle trigonométrique que tu as tracé. Explique pourquoi il y a des parties hachurées dans le tableau que tu as rempli.	- Faire remplir un tableau du type suivant:	

ANGLES (α)			FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES					
°	rad	Coordonnées	cos α	sin α	tan α	sec α	csc α	cot α
0	0	(1, 0)	1	0	0	1		
30	$\frac{\pi}{6}$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	(0, 1)	0	1			1	0
120	$\frac{2\pi}{3}$	$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1
150	$\frac{5\pi}{6}$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$-\sqrt{3}$
180	π	(-1, 0)	-1	0	0	-1		
210	$\frac{7\pi}{6}$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{3}$
225	$\frac{5\pi}{4}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1
240	$\frac{4\pi}{3}$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
270	$\frac{3\pi}{2}$	(0, -1)	0	-1			-1	0
300	$\frac{5\pi}{3}$	$(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
315	$\frac{7\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

ANGLES (θ)			FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES					
°	rad	Coordonnées	cos θ	sin θ	tan θ	sec θ	csc θ	cot θ
330	$\frac{11\pi}{6}$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\sqrt{3}$
360	2π	(1, 0)	1	0	0	1		
-30								
-45								
-60								
-90								
-120								

Quelle est la valeur de $\cos(\pi - t)$ si $0 < t < \frac{\pi}{2}$?

- L'élève devrait savoir que $P(\pi - t)$ est dans le 2^e quadrant;

que $P(\pi - t)$ est symétrique à $P(\pi - t)$ par rapport à l'axe des x ($y = 0$);

que $P(\pi - t)$ est symétrique à $P(t)$ par rapport à l'axe des y ($x = 0$).

Donc, il s'agit d'inverser le processus:

$$P(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$P(\pi - t) = (-\cos t, \sin t)$$

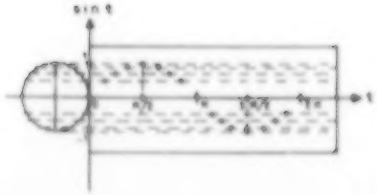
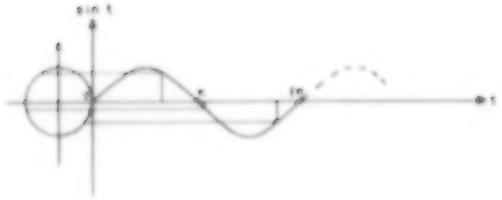
$$P(\pi + t) = (-\cos t, -\sin t)$$

$$\cos(\pi + t) = \cos t$$

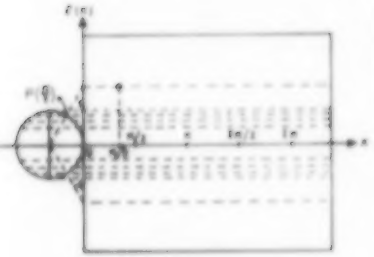
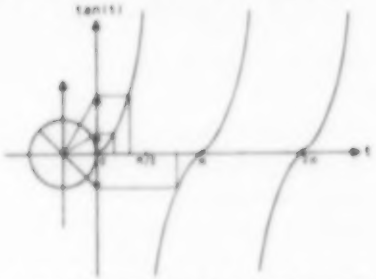
- Utiliser d'autres propriétés de la fonction d'enroulement pour dégager diverses relations.

2.3.6

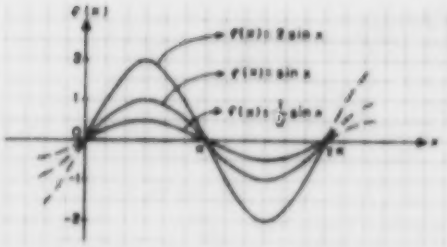
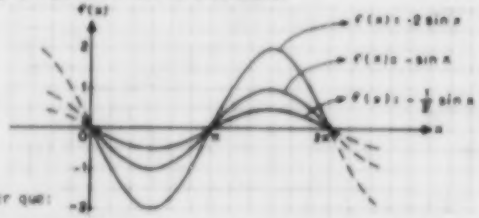
DÉFINIR les fonctions sinus, cosinus et tangente.

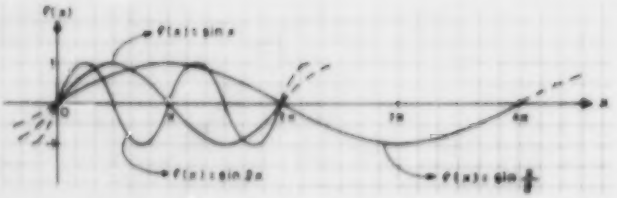
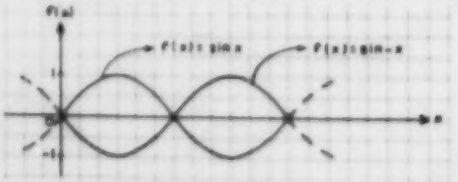
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Bloc 4	- Les situations d'apprentissage proposées dans cette partie permettront aux élèves d'acquérir les connaissances et de développer les habiletés reliées aux objectifs intermédiaires 2.3.7 à 2.3.10: • TRACER le graphique cartésien des fonctions sinus, cosinus et tangente. • TROUVER le domaine et l'image des fonctions sinus, cosinus ou tangente. • DÉTERMINER le minimum ou le maximum des fonctions sinus ou cosinus. • l'une des fonctions sinus, cosinus ou tangente étant donnée, DÉTERMINER si elle est croissante ou décroissante dans un intervalle donné.	
4.1 Graphique cartésien de la fonction sinus Utilise ton trigonographe pour construire la courbe de la fonction sinus. "sin t" étant l'ordonnée d'un point sur le cercle trigonométrique, il s'agit donc de reporter cette valeur (la hauteur du point).  	- Cette construction est strictement géométrique et elle vise à faire prendre conscience à l'élève de l'allure de la courbe de la fonction sinus.  	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
En utilisant ta calculatrice ou le tableau de valeurs construit précédemment, trace le graphique cartésien de la fonction sinus. 	- Vérifier si l'élève utilise bien le mode "radian" sur sa calculatrice. - À l'aide de ce graphique cartésien, faire découvrir ou dégager les éléments suivants: • le domaine et l'image; • la période et l'amplitude; • les intervalles de croissance et de décroissance.	
4.2 Graphique cartésien de la fonction cosinus En utilisant ta calculatrice ou le tableau de valeurs construit précédemment, trace le graphique cartésien de la fonction cosinus. 	- À l'aide de ce graphique cartésien, faire dégager les éléments suivants: • le domaine et l'image; • la période et l'amplitude; • les intervalles de croissance et de décroissance.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
4.3 <u>Graphique cartésien de la fonction tangente</u> Utilise ton trigonographe pour construire la courbe de la fonction tangente.  En utilisant ta calculatrice ou le tableau de valeurs construit précédemment, trace le graphique cartésien de la fonction tangente. 	- Cette construction géométrique vise à faire prendre conscience à l'élève de l'allure de la courbe de la fonction tangente.  - Profiter de l'occasion pour rappeler ce qu'est une "asymptote". - A l'aide de ce graphique cartésien, faire dégager les éléments suivants: - le domaine et l'image; - la période; - les intervalles de croissance et de décroissance.	2.3.7 TRACER le graphique cartésien des fonctions sinus, cosinus et tangente. 2.3.8 TROUVER le domaine et l'image des fonctions sinus, cosinus et tangente. 2.3.9 DÉTERMINER le minimum ou le maximum des fonctions sinus ou cosinus. 2.3.10 L'une des fonctions sinus, cosinus ou tangente étant donnée, DÉTERMINER si elle est croissante ou décroissante dans un intervalle donné.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Bloc 5	- Les situations d'apprentissage proposées dans cette partie permettront aux élèves d'acquérir les connaissances et de développer les habiletés reliées à l'objectif intermédiaire 2.3.15: • ÉVALUER l'amplitude, la période, la fréquence ou le déphasage d'une fonction sinusoïdale. - L'étude de la fonction $f(x) = A \sin (B(x - h)) + k$ est présentée comme suit: 1° l'influence de chacun des paramètres pris isolément; 2° définition de concepts tels que l'amplitude, la période, la fréquence et le déphasage. 3° analyse de différents problèmes de la vie courante. - Pour introduire l'étude de la fonction sinusoïdale, on pourrait présenter quelques problèmes d'applications. Par exemple, la théorie du biorythme, le mouvement harmonique simple, le son, peuvent être des situations à exploiter.	
5.1 La fonction sinusoïdale-influence du paramètre A Trace sur le même graphique les courbes des fonctions suivantes: $f(x) = \sin x$ $f(x) = 2 \sin x$ $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$	- L'utilisation d'un micro-ordinateur, à l'aide d'un logiciel approprié, s'avérerait très utile pour visualiser l'effet des différents paramètres. - Cette activité a pour but de faire constater à l'élève que le paramètre A contribue à DILATER ou CONTRACTER verticalement le graphique de la fonction sinusoïdale.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Quelle est donc l'influence du paramètre A dans $f(x) = A \sin x$?	 Si $0 < A < 1$, le graphique se contracte verticalement; si $A > 1$, le graphique se dilate verticalement.	
Qu'arrive-t-il si le paramètre A est négatif? Pour répondre à cette question, trace les courbes des fonctions suivantes sur le même graphique cartésien: $f(x) = -2 \sin x$ $f(x) = -\sin x$ $f(x) = -\frac{1}{2} \sin x$	 - Faire constater que: • la courbe se contracte si $-1 < A < 0$; • la courbe se dilate si $A < -1$; cependant, $f(x) = A \sin x$ $(A < 0)$ a le signe contraire de $\sin x$.	
5.7 <u>La fonction sinusoïdale-influence du paramètre B</u> Trace sur le même graphique cartésien les courbes des fonctions suivantes: $f(x) = \sin x$ $f(x) = \sin 2x$ $f(x) = \sin \frac{x}{2}$	- Cette activité a pour but de faire constater aux élèves que le paramètre B contribue à DILATER ou à CONTRACTER horizontalement le graphique cartésien de la fonction sinusoïdale.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Quelle est donc l'influence du paramètre B dans $f(x) = \sin Bx$?		
Qu'arrive-t-il si le paramètre B est négatif?	- Faire constater que le graphique cartésien se contracte horizontalement pour $0 < B < 1$ et que pour $B > 1$, le graphique se dilate horizontalement.	
Pour répondre à cette question, trace les courbes des fonctions suivantes, et ce sur le même graphique cartésien:		
$f(x) = \sin x$	- L'élève devrait constater que la courbe de $f(x) = \sin -Bx$ est l'image de la courbe de $f(x) = \sin Bx$ par une réflexion d'axe x.	
$f(x) = \sin -x$	- Faire comparer les courbes des fonctions $f(x) = \sin (-x)$ et $f(x) = -\sin x$.	
9.3 <u>La fonction sinusoïdale-influence du paramètre h</u>		
a) Trace sur un même graphique cartésien les courbes des fonctions:		
$f(x) = \sin x$		
$f(x) = \sin (x + \frac{\pi}{2})$		

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

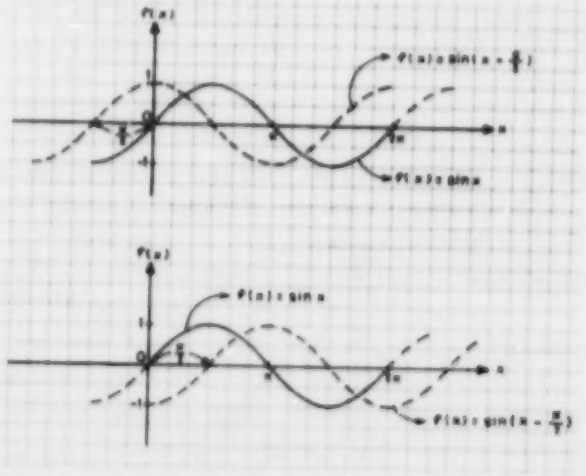
b) Trace sur un même graphique cartésien les courbes des fonctions

$f(x) = \sin x$

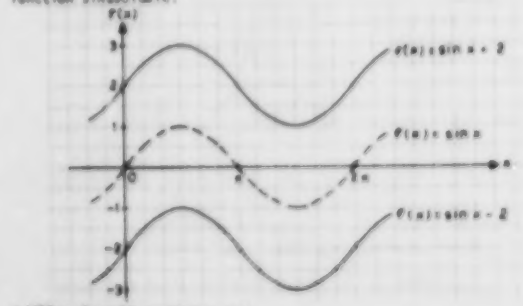
$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

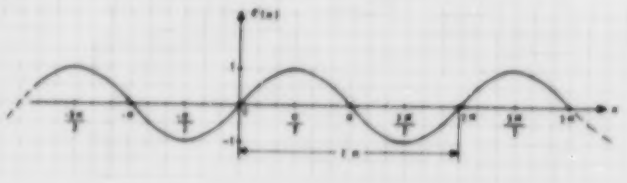
Quelle est donc l'influence du paramètre h dans $f(x) = \sin(x - h)$?

- Cette activité a pour but de faire constater à l'élève que le paramètre h contribue à TRANSLATER horizontalement le graphique cartésien de la fonction sinusoïdale.

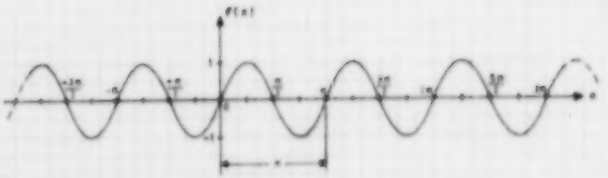


- Faire constater aux élèves que:
  - pour h > 0, le graphique cartésien se translate horizontalement vers la droite;
  - pour h < 0, le graphique cartésien se translate horizontalement vers la gauche.

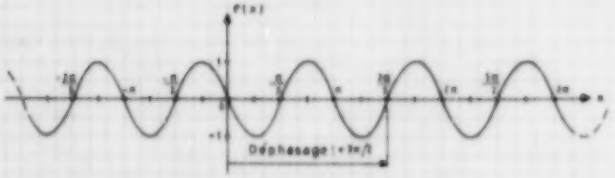
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
5.4 <u>La fonction sinusoïdale-influence du paramètre k</u> Trace sur un même graphique cartésien les courbes des fonctions: $f(x) = \sin x$ $f(x) = \sin x + 2$ $f(x) = \sin x - 2$ Quelle est donc l'influence du paramètre k dans $f(x) = \sin x + k$?	- Cette activité a pour but de faire constater à l'élève que le paramètre k contribue à translater verticalement le graphique cartésien de la fonction sinusoïdale.  - L'élève devrait constater que: • pour k > 0, le graphique cartésien se translate verticalement vers le haut; • pour k < 0, le graphique cartésien se translate verticalement vers le bas.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
5.5 Graphique cartésien de la fonction $f(x) = A \sin (B (x - h)) + k$	- La fonction $f(x) = A \sin (B(x - h)) + k$ possède une amplitude, une période, une fréquence et un déphasage. Définir ces concepts en faisant le lien avec les activités précédentes, qui ont mis en lumière l'influence des différents paramètres. - Montrer ensuite aux élèves que, pour construire le graphique d'une fonction sinusoïdale, il s'agit de procéder par étapes: 1° tracer la courbe de $f(x) = \sin x$; 2° tracer la courbe de $f(x) = \sin Bx$, en tenant compte de la période $\frac{2\pi}{3}$; 3° tracer la courbe de $f(x) = \sin (B(x - h))$, en tenant compte du déphasage h; 4° tracer la courbe de $f(x) = A \sin (B(x - h))$, en tenant compte de l'amplitude A; 5° tracer la courbe de $f(x) = A \sin (B(x - h)) + k$, en déplaçant la courbe obtenue précédemment de k unités suivant la verticale.	
Trace le graphique cartésien de la fonction $f(x) = \frac{1}{2} \sin (2x - 3\pi) + 2$ ou $f(x) = \frac{1}{2} \sin (2(x - \frac{3\pi}{2})) + 2$, dans laquelle: $A = \frac{1}{2}$ $B = 2$ $h = \frac{3\pi}{2}$ $k = 2$	- L'élève devrait obtenir ce qui suit:  $f(x) = \sin x$	

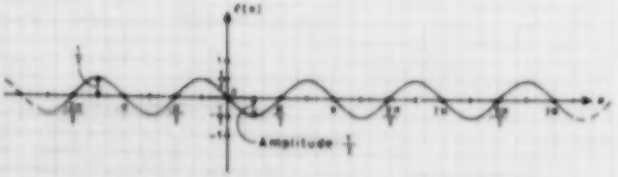
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints



$f(x) = \sin(2x)$

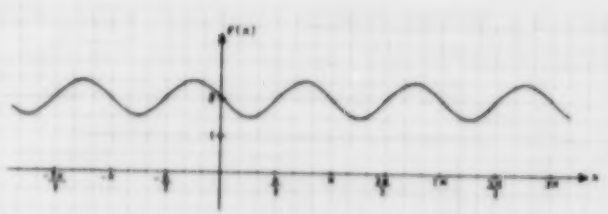


$f(x) = \sin\left(2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)\right)$



$f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)\right)$

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints



$$f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)\right) + 2$$

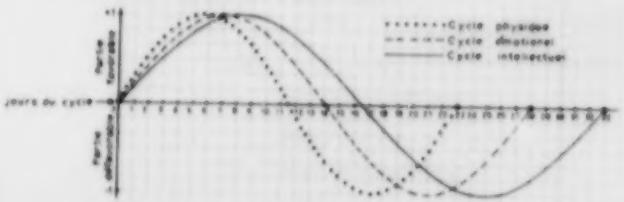
5.6 Applications diverses

- Présenter quelques problèmes d'applications, par exemple:

La théorie du biorythme repose sur le fait que trois cycles influent sur notre vie. Ces cycles ont leurs origines au jour de notre naissance.

1. Le cycle physique dure 23 jours.
2. Le cycle émotionnel dure 28 jours.
3. Le cycle intellectuel dure 33 jours.

La première moitié de chaque cycle est considérée comme étant la "partie favorable" et la deuxième moitié, la "partie défavorable".



Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Trace les trois courbes de ton biorythme.	Pour tracer les courbes point par point, on utilise la relation suivante: valeur du biorythme en un point donné = sin (360 × d) où d représente la partie décimale du résultat $\left[\left(\frac{\text{nombre de jours depuis la naissance}}{\text{durée du cycle}}\right) \times 360\right]$ Pour calculer le nombre de jours depuis la naissance, il faut: • calculer le nombre de jours depuis votre dernier anniversaire; • multiplier votre âge par 365; • compter chaque année bissextile que vous avez vécue (48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84). La somme des trois nombres ainsi obtenus vous donne le nombre de jours vécus depuis votre naissance. - Présenter d'autres phénomènes qui se traduisent par une fonction sinusoïdale: • mouvement harmonique simple $y = A \sin B(t - h),\ t = 0;$ • le son $y = A \sin Bt,\ t = 0;$ • le piston d'un moteur $d = 5 \sin 40\pi t;$ • le mouvement des marées $h = 3 \sin \frac{24\pi}{149} t + 2;$ • etc.	2.3.15 ÉVALUER l'amplitude, la période, la fréquence ou le déphasage d'une fonction sinusoïdale

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Bloc 6	- Les situations d'apprentissage proposées dans cette partie permettront aux élèves d'acquérir les connaissances et de développer les habiletés reliées aux objectifs intermédiaires 2.3.11 à 2.3.13: • TRACER le graphique cartésien de la réciproque des fonctions sinus, cosinus ou tangente. • TROUVER le domaine et l'image des fonctions arc sinus, arc cosinus ou arc tangente. • L'une des fonctions arc sinus, arc cosinus ou arc tangente étant donnée, DÉTERMINER si elle est croissante ou décroissante sur un intervalle donné. N.B.: Ces objectifs sont facultatifs; ils font partie du cours 064-531 ou 564-531.	
6.1 La fonction arc sinus Trace le graphique de la fonction $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sin x\}$ et le graphique de sa réciproque $f^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \sin y\}$ f^{-1} est-elle une fonction?	- Rappeler au besoin ce qu'est la réciproque d'une fonction ou d'une relation. - Faire observer que la réciproque n'est pas une fonction. Pour remédier à cet inconvénient, il suffit de restreindre le domaine de la fonction sinus de façon à la rendre injective. En limitant le domaine à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, la réciproque $\sin^{-1}x$ ou arc sin x sera une fonction. Cette restriction n'est évidemment pas unique; c'est cependant le choix le plus utilisé.	

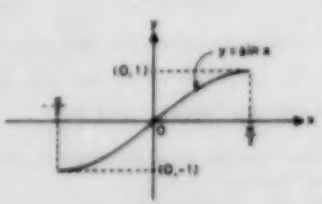
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

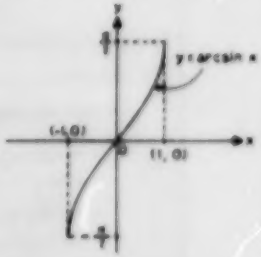
Trace les graphiques du sinus et de sa réciproque, en limitant le domaine du sinus à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

À l'aide de ces graphiques:

a) détermine le domaine et l'image de chaque fonction;

b) détermine si les fonctions sont croissantes ou décroissantes.





$\text{dom (sin)} = \text{ima (arc sin)} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\text{ima (sin)} = \text{dom (arc sin)} = [-1, 1]$

- Faire observer que:

$\sin^{-1} x = \text{arc sin } x$

et

$(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x} = \csc x$

6.2 La fonction arc cosinus

Trace le graphique de la fonction

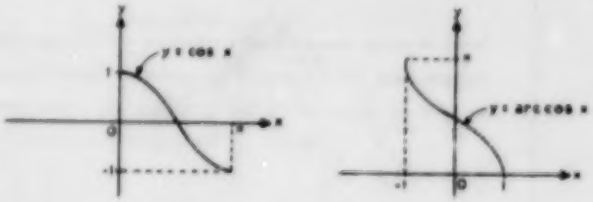
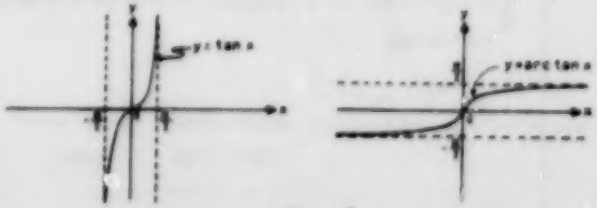
$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \cos x\}$

et le graphique de sa réciproque

$f^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \cos y\}$.

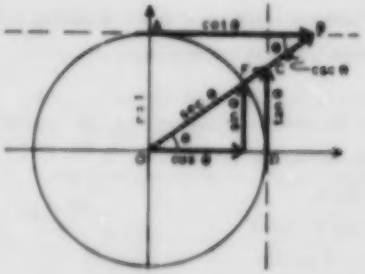
f^{-1} est-elle une fonction?

- Faire observer que la réciproque n'est pas une fonction et qu'il faudra restreindre le domaine de la fonction cosinus.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Trace les graphiques du cosinus et de sa réciproque, en limitant le domaine du cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$. a) détermine ensuite le domaine et l'image de chacune des fonctions; b) détermine si les fonctions sont croissantes ou décroissantes.	 dom (cos) = ima (arc cos) = $[0, \pi]$ ima (cos) = dom (arc cos) = $[-1, 1]$	
6.3 La fonction arc tangente Trace le graphique de la fonction $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \tan x\}$ et le graphique de sa réciproque $f^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \tan y\}$. f^{-1} est-elle une fonction?	- Encore une fois, la réciproque n'est pas une fonction. Le domaine devra être restreint.	
Trace les graphiques de la tangente et de sa réciproque, en limitant le domaine de la tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. a) détermine le domaine et l'image de chaque fonction; b) détermine si les fonctions sont croissantes ou décroissantes.	 dom (tan) = ima (arc tan) = $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ima (tan) = dom (arc tan) = $\mathbb{R}$	2.3.11 TRACER le graphique cartésien de la réciproque des fonctions sinus, cosinus ou tangente. 2.3.12 TROUVER le domaine et l'image des fonctions arc sinus, arc cosinus ou arc tangente.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
6.4 Applications Évalue: a) $\sin^{-1}(1)$ b) arc sin (-1) c) arc sin $(\frac{\sqrt{3}}{2})$ d) 3 arc sin $(\frac{\sqrt{3}}{2})$ + 2 arc cos $(\frac{\sqrt{3}}{2})$ e) cos (arc sin $\frac{\sqrt{3}}{2}$) f) ...	- Avant de passer aux différents exercices reliés à ces fonctions, explorer avec les élèves leur calculatrice. Cette exploration peut se faire en se guidant sur les graphiques des différentes fonctions.	2.3.13 L'une des fonctions arc sinus, arc cosinus ou arc tangente étant donnée, DÉTERMINER si elle est croissante ou décroissante sur un intervalle donné.
Bloc 7	- Les situations d'apprentissage proposées dans cette partie permettront aux élèves d'acquérir les connaissances et de développer les habiletés reliées à l'objectif intermédiaire 2.3.14: • DÉMONTRER l'identité d'expressions trigonométriques.	
7.1 Rappel des relations de base	- Rappeler les définitions des fonctions de base et de leurs inverses. Utiliser la fonction d'enroulement ou les segments orientés représentant les fonctions.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints



$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

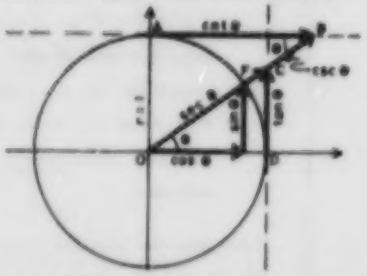
7.2 Identités fondamentales

- En se basant sur le cercle trigonométrique, déduire les identités suivantes:

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$



- Montrer que ces relations peuvent s'écrire autrement selon les besoins.

Exemple: $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\tan^2\theta + \sec^2\theta = 1$

$\tan\theta = \pm\sqrt{\sec^2\theta - 1}$

...

Partant de $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, montre que les relations suivantes sont vraies:

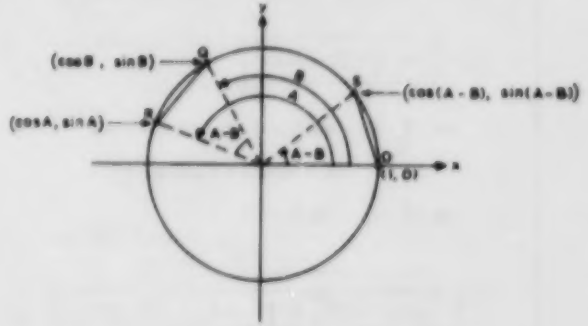
a) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

b) $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

Suggestion: divise chaque membre de $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ par $\sin^2\theta \neq 0$ ou $\cos^2\theta \neq 0$.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	- Faire résoudre de nombreux exercices afin que les élèves puissent utiliser adéquatement les relations de base. Exemples: • Exprime tous les rapports trigonométriques en fonction de sin θ. • Simplifie les expressions suivantes: a) cos θ • csc θ b) sin θ • sec θ • cot θ c) $\sin^2\theta \cdot (1 \cdot \cot^2\theta)$ d) ...	
7.3 Résolution des identités	- Définir ce qu'est une identité et à l'aide d'exemples judicieusement choisis, expliquer comment résoudre une identité. On peut par exemple: • Transformer un des deux membres pour le rendre semblable à celui qui reste intact. • Transformer les deux membres afin qu'ils deviennent identiques. • Dans chaque cas, éviter de faire intervenir des radicaux et remplacer chaque rapport par sin et/ou cos, si on ne peut faire autrement. - Faire démontrer plusieurs identités: a) (1 - cos θ) · sec θ • sec θ • 1 b) sec θ - cos θ • sin θ • tan θ c) $\frac{\sin\theta \cdot \tan\theta}{1 \cdot \sec\theta} \cdot \sin\theta$ d) ...	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
7.4 Fonctions trigonométriques d'une somme ou d'une différence de deux réels	- Cette partie est difficile mais essentielle. Effectuer la démonstration de chaque identité en impliquant le plus possible les élèves. N.B.: Les différentes identités retenues sont démontrées dans les pages qui suivent. Accompagner d'exemples et d'exercices chacune des démonstrations, s'il y a lieu. ① $\cos (A - B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$	



On utilise d'abord la formule de la distance.

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\bullet\ (QS)^2 = (\cos (A - B) - 1)^2 + (\sin (A - B) - 0)^2$$

$$= \cos^2(A - B) - 2 \cos (A - B) + 1 + \sin^2(A - B)$$

$$= \cos^2(A - B) + \sin^2(A - B) + 1 - 2 \cos (A - B)$$

$$= 1 + 1 - 2 \cos (A - B)$$

$$(QS)^2 = 2 - 2 \cos (A - B)$$

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

Montre que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Quelle est la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$?

$\left(\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

- $(QR)^2 = (\cos B - \cos A)^2 + (\sin B - \sin A)^2$

$= \cos^2 B - 2\cos A\cos B + \cos^2 A + \sin^2 B - 2\sin A\sin B + \sin^2 A$

$= \cos^2 B + \sin^2 B + \cos^2 A + \sin^2 A - 2\cos A\cos B - 2\sin A\sin B$

$= 1 + 1 - 2\cos A\cos B - 2\sin A\sin B$

$(QR)^2 = 2 - 2\cos A\cos B - 2\sin A\sin B$

- $2 - 2\cos(A - B) = 2 - 2\cos A\cos B - 2\sin A\sin B$

$-2\cos(A - B) = -2\cos A\cos B - 2\sin A\sin B$

$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

(2) $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \sin B}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos B + \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin B$

$= 0\cdot\cos B + 1\cdot\sin B$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \sin B$

(3) $\boxed{\cos(-B) = \cos B}$

$\cos(-B) = \cos(0 - B) = \cos 0\cdot\cos B + \sin 0\cdot\sin B$

$\cos(-B) = 1\cdot\cos B + 0\cdot\sin B$

$\cos(-B) = \cos B$

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	④ $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \cos B}$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - B\right)\right)$ $= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + B\right)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \cos B$	
	⑤ $\boxed{\sin(-B) = -\sin B}$ $\sin(-B) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-B)\right)$ $= \cos\left(B - (-\frac{\pi}{2})\right)$ $= \cos B \cdot \cos -\frac{\pi}{2} + \sin B \cdot \sin -\frac{\pi}{2}$ $= \cos B \cdot 0 + \sin B \cdot -1$ $= 0 - \sin B$ $\sin(-B) = -\sin B$	
Prouve que $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, sachant que $\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$. Quelle est la valeur de $\cos\frac{7\pi}{12}$? $(\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})$	⑥ $\boxed{\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B}$ $\cos(A + B) = \cos(A - (-B)) = \cos A \cdot \cos(-B) + \sin A \cdot \sin(-B)$ $\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot -\sin B$ $\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Quelle est la valeur de $\sin \frac{5\pi}{6}$? $(\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$ Prouve que $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. $(\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})$ Simplifie $\sin(\pi - \theta)$. Quelle est la valeur de $\sin(\alpha - \beta)$, si $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$, et sachant que $P(\alpha) \in 2^{e}$ quadrant, $P(\beta) \in 1^{er}$ quadrant?	⑦ $\boxed{\sin(A+B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B}$ $\sin(A+B) = \cos(\frac{\pi}{2} - (A+B))$ $= \cos((\frac{\pi}{2} - A) - B)$ $= \cos(\frac{\pi}{2} - A) \cdot \cos B + \sin(\frac{\pi}{2} - A) \cdot \sin B$ $\sin(A+B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$ ⑧ $\boxed{\sin(A-B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B}$ $\sin(A-B) = \cos(\frac{\pi}{2} - (A-B))$ $= \cos((\frac{\pi}{2} - A) + B)$ $= \cos(\frac{\pi}{2} - A) \cdot \cos B - \sin(\frac{\pi}{2} - A) \cdot \sin B$ $\sin(A-B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	⑨ $\boxed{\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}}$ $\tan (A + B) = \frac{\sin (A + B)}{\cos (A + B)}$ $= \frac{\sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B}$ $= \frac{\frac{\sin A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B} + \frac{\cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B}}{\frac{\cos A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B} - \frac{\sin A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B}}$ $= \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{1 - \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B}}$ $\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$	
Prouve que $\tan (\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot \theta$. Quelle est la valeur exacte de $\tan \frac{\pi}{12}$?	⑩ $\boxed{\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}}$ $\tan (A - B) = \frac{\sin (A - B)}{\cos (A - B)}$ $= \frac{\sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B}$ $= \frac{\frac{\sin A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B} - \frac{\cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B}}{\frac{\cos A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B} + \frac{\sin A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B}}$ $= \frac{\frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B}}{1 + \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B}}$ $\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

7.5 Fonctions trigonométriques du double d'un réel

Si $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ et $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcule $\sin 2\alpha$.

Si $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ et $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcule $\cos 2\alpha$.

Si $\tan \alpha = -\frac{3}{5}$ et $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule $\tan 2\alpha$.

- Effectuer la démonstration de chaque identité en impliquant le plus possible les élèves.

N.B.: Ces identités sont démontrées dans les pages qui suivent.

Accompagner d'exemples et d'exercices chacune des démonstrations.

① $\boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$

$\sin 2\alpha = \sin (\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha$

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

② $\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$

$\cos 2\alpha = \cos (\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\begin{bmatrix} \cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2\alpha \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) \\ \cos 2\alpha = 2 \cos^2\alpha - 1 \end{bmatrix}$

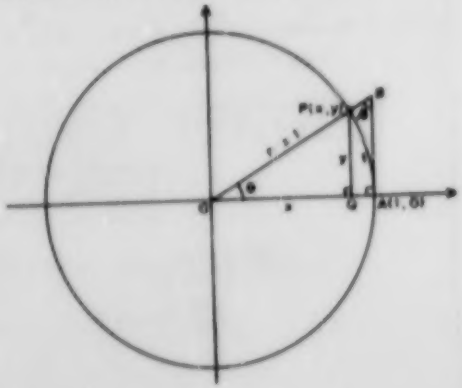
$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2\alpha}$ $\boxed{\cos 2\alpha = 2 \cos^2\alpha - 1}$

③ $\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2\alpha}}$

$\tan 2\alpha = \tan (\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \alpha}$

$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Bloc B	- Les situations d'apprentissage proposées dans cette partie permettront aux élèves d'acquérir les connaissances et de développer les habiletés reliées à l'objectif intermédiaire 2.3.16: • DÉTERMINER les zéros, s'ils existent, d'une somme ou d'un produit de fonctions trigonométriques. N.B.: Cet objectif est facultatif; il fait partie du cours 064-531 ou 564-531.	2.3.16 DÉTERMINER les zéros, s'ils existent, d'une somme ou d'un produit de fonctions trigonométriques.
3.1 Résolution des équations trigonométriques Quel est l'ensemble-solution des équations suivantes: a) $2 \sin x - 1 = 0$ b) $\sin^2\theta - 2 \sin \theta = 3$ c) $2 \tan \theta \sin \theta - \tan \theta = 0$ d) ...	- Définir ce qu'est une équation trigonométrique. Accompagner cette définition d'exemples et d'exercices. - La résolution des équations permet de faire la synthèse de la majorité des concepts vus précédemment.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Bloc 9	- Les situations d'apprentissage proposées dans cette partie permettront aux élèves d'acquérir les connaissances et de développer les habiletés reliées aux objectifs intermédiaires 2.3.17 et 2.3.18. • DÉTERMINER les rapports trigonométriques dans le triangle rectangle. • ÉVALUER des mesures en appliquant la loi des sinus ou la loi des cosinus.	
9.1 Rapports trigonométriques dans le triangle rectangle	- Les rapports trigonométriques, étant au programme de quatrième secondaire, sont donc connus des élèves. En utilisant les triangles semblables, il serait important de faire le lien entre les rapports obtenus dans un cercle de rayon 1 et ceux obtenus dans un cercle de rayon r. De cette façon, on définit les rapports trigonométriques dans le triangle rectangle. 	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

L'élève sait déjà que:

$$\sin\theta = \sin t = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \cos t = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \tan t = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\cot\theta = \cot t = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$\sec\theta = \sec t = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc\theta = \csc t = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0)$$

Les triangles OPQ et OBA étant semblables, on peut alors définir les rapports trigonométriques en ne faisant référence à aucun système de coordonnées.

Ainsi: $\frac{OQ}{OA} = \frac{OP}{OB} = \frac{PQ}{BA}$

$\frac{PQ}{OP} = \frac{BA}{OB}$ et $\frac{OQ}{OP} = \frac{OA}{OB}$, etc.

On peut alors en tirer les six rapports trigonométriques.

$$\sin\theta = \frac{BA}{OB} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \theta}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

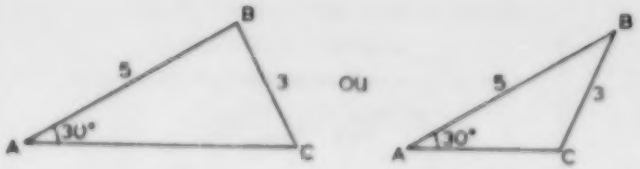
$$\cos\theta = \frac{OA}{OB} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \theta}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\tan\theta = \frac{BA}{OA} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \theta}{\text{longueur du côté adjacent à } \theta}$$

$$\cot\theta = \frac{OA}{BA} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \theta}{\text{longueur du côté opposé à } \theta}$$

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	$\sec \theta = \frac{OB}{OA} = \frac{\text{longueur de l'hypoténuse}}{\text{longueur du côté adjacent à } \theta}$ $\csc \theta = \frac{OB}{BA} = \frac{\text{longueur de l'hypoténuse}}{\text{longueur du côté opposé à } \theta}$	
9.2 Résolution des triangles rectangles	- S'assurer que les élèves savent utiliser correctement leur calculatrice avant de poursuivre. Quelques activités sur l'utilisation des tables pourraient être envisagées. - Comme la résolution d'un triangle rectangle consiste à trouver la valeur de ses angles et de ses côtés, rappeler, à l'aide d'exemples, les deux cas suivants: • on connaît deux côtés quelconques; • on connaît un côté et un angle aigu. - Étant donné que cette partie est un rappel, il serait prioritaire, à partir d'exercices et de problèmes, d'évaluer l'habileté qu'ont les élèves à utiliser les rapports trigonométriques.	2.3.17 DÉTERMINER les rapports trigonométriques dans le triangle rectangles.
9.3 La résolution des triangles quelconques Qu'arrive-t-il lorsque le triangle n'est pas rectangle? Construis un triangle ABC dans lequel $\angle A = 30^\circ$, $c = b$ et $a = 2$.	- Discuter avec les élèves et conclure qu'il faudra procéder autrement pour résoudre un triangle quelconque. - Montrer que, dans ce cas, on peut construire deux triangles qui satisfont aux conditions:	

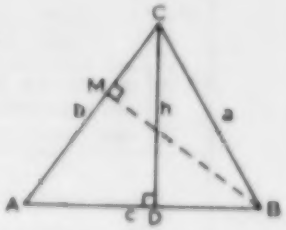
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints



Les deux solutions devront être envisagées dans un tel cas.

- Démontrer la loi des sinus:

• Prenons un triangle ABC quelconque.



On sait que:

$$\sin A = \frac{h}{b} \text{ (dans le } \Delta ACD)$$

$$\sin B = \frac{h}{a} \text{ (dans le } \Delta BCD)$$

On en déduit que: $h = b \cdot \sin A$

$$h = a \cdot \sin B$$

et que: $b \cdot \sin A = a \cdot \sin B$

On divise ensuite chaque membre par $\sin A \cdot \sin B$:

$$\frac{b \cdot \cancel{\sin A}}{\cancel{\sin A} \cdot \sin B} = \frac{a \cdot \cancel{\sin B}}{\sin A \cdot \cancel{\sin B}}$$

On obtient alors: $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$ ①

• Choisissons une autre hauteur dans le triangle ABC, soit BM.

On sait que:

$$\sin C = \frac{h}{a} \text{ (dans le } \Delta BCM)$$

$$\sin A = \frac{h}{c} \text{ (dans le } \Delta BAM)$$

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

On en déduit que: $h = a \cdot \sin C$

$h = c \cdot \sin A$

et que: $a \cdot \sin C = c \cdot \sin A$

On divise ensuite chaque membre par $\sin A \cdot \sin C$:

$$\frac{a \cdot \cancel{\sin C}}{\sin A \cdot \cancel{\sin C}} = \frac{c \cdot \cancel{\sin A}}{\cancel{\sin A} \cdot \sin C}$$

On obtient alors: $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ (2)

- Si on relie (1) et (2), on obtient:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Les côtés d'un triangle quelconque sont proportionnels aux sinus des angles opposés à ses côtés.

- Vérifier à partir d'exercices et de problèmes l'habileté qu'ont les élèves à utiliser la loi des sinus.

Exemple: Un bateau est vu de deux postes d'observation, A et B, sur la rive. Les points A et B sont distants de 24 km. La mesure de l'angle A entre $\overline{AB}$ et le bateau est de $41°40'$. L'angle B mesure $36°10'$. Trouve la distance, au dixième de km près, entre le bateau et chacun des postes A et B.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

Solution: Avant de résoudre ce problème, il faut regarder si on ne peut pas trouver d'autres données par déduction.

Ici, $\angle C = 180^0 - \angle A - \angle B$

$= 180^0 - 41^0 40' - 36^0 30'$

$= 101^0 50'$

- $\frac{BC}{\sin A} = \frac{BA}{\sin C}$

$\frac{BC}{\sin 41^0 40'} = \frac{24 \text{ km}}{\sin 101^0 50'}$

$\frac{BC}{\sin 41,666...^0} = \frac{24 \text{ km}}{\sin 101,833...^0}$

$\frac{BC}{0,6647959} = \frac{24 \text{ km}}{0,9787483}$

$BC = \frac{24 \times 0,6647959}{0,9787483}$

$BC \approx 16,3 \text{ km}$

- $\frac{CA}{\sin B} = \frac{BA}{\sin C}$

$\frac{CA}{\sin 36^0 10'} = \frac{24 \text{ km}}{\sin 101^0 50'}$

$\frac{CA}{\sin 36,166...^0} = \frac{24 \text{ km}}{\sin 101,833...^0}$

$\frac{CA}{0,5901361} = \frac{24 \text{ km}}{0,9787483}$

$CA = \frac{24 \times 0,5901361}{0,9787483}$

$CA \approx 14,5 \text{ km}$

Réponse: Le bateau est à 16,3 km du poste d'observation B et à 14,5 km du poste d'observation A.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

- Démontrer la loi des cosinus:

On suppose que l'on connaît les trois côtés d'un triangle quelconque.

- Dans le triangle BDC, on a:

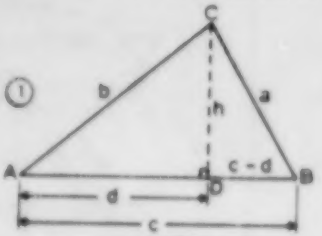
$$a^2 = h^2 + (c - d)^2$$

$$a^2 = h^2 + c^2 - 2cd + d^2 \quad (1)$$

- Dans le triangle ADC, on a:

$$b^2 = h^2 + d^2$$

$$h^2 = b^2 - d^2 \quad (2)$$



- De (1) et (2), on obtient:

$$a^2 = b^2 - d^2 + c^2 - 2cd + d^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cd$$

On sait que dans le triangle ADC, $\cos A = \frac{d}{b}$

$d = b \cos A$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

Cette loi s'énonce comme suit:

> Le carré de la longueur d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des longueurs des autres côtés, moins le double produit des longueurs des deux autres côtés par le cosinus de l'angle compris entre ces deux côtés.

- Vérifier à partir d'exercices et de problèmes l'habileté qu'ont les élèves à utiliser la loi des cosinus.

Démontre les relations:

a) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$

b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

Exemple 1:

Soit ABC, un triangle quelconque dont les côtés mesurent respectivement 9 cm, 12 cm et 20 cm. Quelle est la mesure de $\angle C$?

$a = 9$ cm,

$b = 12$ cm,

$c = 20$ cm.

Il faut choisir la bonne relation:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

$$2ab \cdot \cos C = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos C = \frac{9^2 + 12^2 - 20^2}{2 \cdot 9 \cdot 12} = \frac{81 + 144 - 400}{216}$$

$$\cos C = \frac{-175}{216} = -0,8102$$

Comme le cosinus de C est négatif, il est donc compris entre 90^0 et 180^0.

C'est donc un angle obtus.

On se rappelle que $\cos (180^0 - \alpha) = -(\cos \alpha)$

D'où: $\cos (180^0 - C) = -(\cos C)$

$= -(-0,8102)$

$= 0,8102$

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

La lecture dans la table nous donne $35,9^\circ$ ou $35^\circ 54'$.

Ainsi: $180^\circ - 35,9 = 144,1^\circ$ ou $144^\circ 6'$

Exemple 2:

Soit ABC, un triangle quelconque dont $\angle A = 60^\circ$,

$b = 3$ cm,

$c = 4$ cm.

- On calcule d'abord la mesure du 3e côté:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ &= 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos 60^\circ \\ &= 9 + 16 - 24 \cdot \tfrac{1}{2} \\ &= 9 + 16 - 12 \\ &= 13 \end{aligned}$$

$$a = \sqrt{13}$$

- On calcule ensuite la mesure des autres angles:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{\sqrt{13}}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\sin B}$$

$$\sin B = \frac{3 \cdot \sin 60^\circ}{\sqrt{13}}$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{13}}$$

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

$$\sin B = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \approx 0,7206$$

$$\angle B \approx 46,1^\circ$$

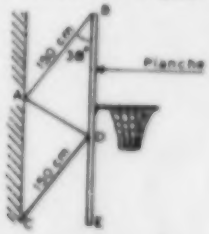
Donc $\angle C \approx 73,9^\circ$.

Exemple 3:

Les points A et B sont situés de chaque côté d'un étang et le point C est situé à l'une des extrémités de l'étang. Si $\angle C = 30^\circ$, AB = 25 m et BC = 30 m, quelle est la distance entre les points A et B?

Exemple 4:

Les supports pour une planche de basketball sont parallèles et forment un angle de 38° avec cette planche (BE). Si la distance de B à D est 140 cm, et si les supports (AB ou CD) mesurent 150 cm de long, quelle est alors la longueur du support intermédiaire AD?



OBJECTIF GÉNÉRAL

N°: 1

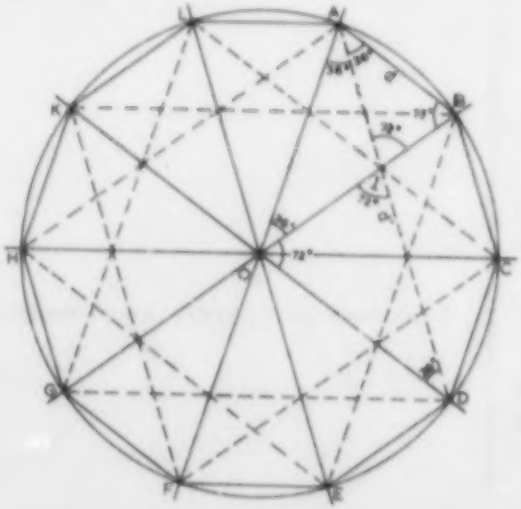
FAVORISER chez l'élève l'analyse de situations géométriques.

Thème: La géométrie

Durée: 15% du temps

OBJECTIF TERMINAL N°: 3.1 RÉSOUDRE des problèmes issus de situations de la vie courante appliquant la notion d'isométrie.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
1. La construction d'un décagone régulier	La construction de ce décagone régulier est une activité-synthèse à travers laquelle seront développées et démontrées de nombreuses relations déjà précisées dans le contenu de ce guide. L'enseignant remet à chaque élève une feuille sur laquelle est tracé un cercle de 7,5 cm de rayon, ou il demande aux élèves de tracer un tel cercle avec leur compas.	
a) Subdivise ce cercle en dix arcs congrus (de chacun 36°), à l'aide de ton rapporteur d'angle.		Cette construction permet de couvrir en partie les objectifs 3.3.1 (angle au centre) et 3.3.4.
b) Marque les points de coupure d'arcs par les lettres A, B, C, ..., H, K, L et marque le centre du cercle par la lettre O. (Dans le sens des aiguilles d'une montre.)		
c) Trace les rayons OA, OB, OC, ..., OH, OK et OL ou les diamètres AF, BG, CH, DK et EL.		
d) Construis d'abord le décagone régulier convexe inscrit dans le cercle, en joignant les points de division (à partir de A) de 1 en 1, et ce, par un trait plein.	Il faut insister sur la précision, lors des diverses constructions.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
5° Construis ensuite le décagone étoilé inscrit dans le cercle, en joignant les points de division (à partir de A) de 3 en 3, et ce, par un trait pointillé. 6° Identifie la corde AB par la lettre d et la corde AD par la lettre d'. 7° Identifie le point de rencontre des cordes BG et d' par la lettre I.	(d est le côté du décagone régulier convexe et d' est le côté du décagone étoilé.) Cette suite de constructions permet d'obtenir la figure suivante.  	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
2. La congruence de polygones	Faire vérifier la congruence de diverses figures géométriques tirées de la construction du décagone régulier. Faire vérifier la congruence de triangles, de quadrilatères, de pentagones, d'hexagones, etc., à partir de: a) la congruence des angles qui se correspondent; b) la congruence des côtés qui se correspondent; c) la congruence des périmètres; d) la congruence des aires. Faire vérifier cette congruence de deux façons: a) à l'aide de transformations géométriques; b) à l'aide de mesures.	3.1.1 COMPARER sous divers critères (angle, côté, périmètre, aire, etc.) des polygones congrus. 3.1.2 ÉNONCER les propriétés de congruence, les théorèmes ou les corollaires impliqués dans la résolution d'un problème.
Vérifie que les polygones ABCD et CDEH sont congrus, dans le cercle O construit précédemment. a) Qu'arrive-t-il si l'on fait tourner de 72° autour du point O le polygone ABCF? b) Quelles sont les mesures des angles et côtés qui sont associés ou qui se correspondent?	Cette activité nécessite la compréhension des deux relations suivantes: ① Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés congrus sont congrus et inversement. ② Des angles au centre congrus interceptent des arcs congrus et des cordes congrues sous-tendent des arcs congrus.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

Vérifier les mesures des côtés, des angles, des périmètres et des aires.

a) Les côtés: $m\overline{AB} = m\overline{CD}$ (2)

$m\overline{BC} = m\overline{DE}$ (2)

$m\overline{CF} = m\overline{EH}$ (2)

$m\overline{AF} = m\overline{GH}$ Ce sont deux rayons.

b) Les angles: $m\angle FAB = 72^0$ et $m\angle HCD = 72^0$ (1)

$m\angle ABC = 144^0$ et $m\angle CDE = 144^0$ (1)

$m\angle BCF = 108^0$ et $m\angle DFH = 108^0$ (1)

$m\angle CFA = 36^0$ et $m\angle EHC = 36^0$ (1)

c) Le périmètre: Cela est évident à cause de la congruence des côtés qui se correspondent.

d) L'aire: Comme les rotations conservent l'aire, on en déduit que l'aire des polygones est la même.

On peut aussi utiliser les fonctions trigonométriques pour calculer l'aire de chacune des deux figures, en les décomposant en triangles:

A ($\triangle AOB$) → l'aire du triangle AOB

$A(\triangle AOB) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AO} \cdot \overline{OB} \cdot \sin 36^0$

$A(\triangle BOC) = \frac{1}{2} \cdot \overline{BO} \cdot \overline{OC} \cdot \sin 36^0$

$A(\triangle OCF) = \frac{1}{2} \cdot \overline{CO} \cdot \overline{OF} \cdot \sin 108^0$

Donc, l'aire du quadrilatère ABCF correspond à la somme des aires de ces trois triangles.

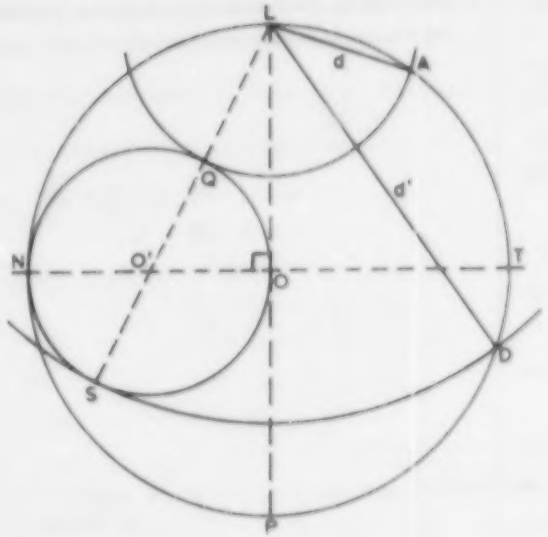
OBJECTIF TERMINAL N°: 3.2 RÉSOUDRE des problèmes issus de situations de la vie courante appliquant la notion de similitude

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
3. La mesure du côté du décagone régulier Dans le décagone régulier, les triangles AOB, ABI et DDI sont-ils semblables? Exprime la longueur R du rayon en fonction de d et d', et ce, en utilisant des relations dans les triangles semblables OAB, ABI et DDI.	Le choix de ces triangles a été fait en fonction de la découverte de la mesure du côté du décagone régulier. Faire vérifier la congruence des angles qui se correspondent, car ces données sont déjà connues. Des calculs savants permettent de vérifier les trois autres propriétés des polygones semblables: • les côtés homologues sont proportionnels, • les périmètres sont proportionnels, • les aires sont proportionnelles au carré du rapport des périmètres. Mais dès que deux paires d'angles qui se correspondent sont congrues, on dit automatiquement que les deux triangles sont semblables. Ces autres propriétés peuvent être utiles, lorsque l'on ne connaît pas les mesures des angles. Mentionnons que les triangles OAB, ABI et DDI sont semblables; de plus, ils sont isocèles. Ainsi: $AB = AI = d$ et $AD = AI + ID$ $OD = DI = R$ $AD = d + R$ $d' = d + R$ ① $\boxed{d' = d + R}$	3.2.1 COMPARER sous divers critères (angle, côté, périmètre, aire, etc.) des polygones semblables. 3.2.2 ÉNONCER les propriétés de similitude, les théorèmes ou les corollaires impliqués dans la résolution d'un problème.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Dans le décagone régulier, les triangles AOD et AIO sont-ils semblables?	Encore ici, le choix de ces deux triangles est en fonction de la découverte de la mesure du côté du décagone régulier. Faire vérifier la congruence des angles qui se correspondent. Donc: les triangles AOD et AIO sont semblables.	
Exprime la longueur R du rayon, en fonction de d et d', et ce, en utilisant une proportion dans les triangles semblables AOD et AIO.	Ainsi: $\frac{\overline{OA}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} \rightarrow \overline{OA}^2 = \overline{AT} \cdot \overline{AD}$ $\overline{OA}^2 = d \cdot d'$ $R^2 = d \cdot d'$ ② $\boxed{R^2 = d \cdot d'}$ ou $\boxed{R = \sqrt{d \cdot d'}}$ Ces deux relations vont nous aider à cheminer vers la découverte du côté du décagone régulier.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
4. <u>Une autre construction géométrique</u> 1° Trace un cercle de 7,5 cm de diamètre et indique les subdivisions ou points O, L, A et D aux mêmes endroits que sur la construction du décagone régulier. 2° Trace les cordes LA (d) et LD (d'). 3° Trace les diamètres LOP et MOT ⊥ LOP. 4° À l'aide du compas, et en prenant le point L comme centre, trace un arc de cercle qui passe par A. 5° À l'aide du compas, et en prenant le point L comme centre, trace un arc de cercle qui passe par D. 6° Trace un cercle dont le centre est O' (MO' = O'O), ce cercle étant tangent au petit arc en Q et au grand arc en S.	Cette nouvelle construction vise à isoler les principaux éléments de la construction du décagone régulier, afin d'y voir un peu plus clair. Cette suite de constructions permet d'obtenir la figure de la page suivante:	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints



Exprime la longueur du côté du décagone régulier, en fonction du rayon du cercle circonscrit, en utilisant le triangle rectangle LOO'.

$\overline{AC} = \overline{LQ} = \overline{LO'} - \overline{O'Q}$

Or: $\overline{LO'}^2 = \overline{LO}^2 + \overline{OO'}^2$ (Relation de Pythagore)

$\overline{LO'}^2 = R^2 + (\frac{R}{2})^2 = \frac{5R^2}{4}$

$\overline{LO'} = \sqrt{\frac{5R^2}{4}} = \frac{R}{2}\sqrt{5}$

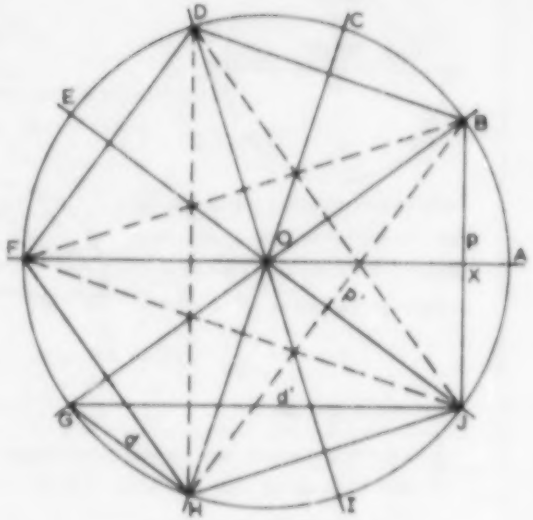
ET

$\overline{O'Q} = \frac{R}{2}$

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	Ainsi: $\overline{AL} = \frac{R}{2}\sqrt{5} - \frac{R}{2}$ $\overline{AL} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ $d = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ Conclusion: Le côté d'un décagone régulier est égal à $\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$, R étant le rayon du cercle circonscrit.	
Quelle serait alors la valeur de d'?	Les élèves devraient être capables d'effectuer cette déduction simple et le développement algébrique qui en découle. $d' = R + d$ $d' = R + \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ $d' = \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)$	
5. La construction d'un pentagone régulier 1° Subdivise ce cercle en dix arcs congrus (de chacun 36°) à l'aide de ton rapporteur d'angle. 2° Marque les points de coupure d'arcs, par les lettres A, B, C, ..., H, I, J, et marque le centre du cercle par la lettre O. (Dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.)	L'enseignant remet à chaque élève une feuille sur laquelle est tracé un cercle de 7,5 cm de rayon, ou il demande aux élèves de tracer un tel cercle avec leur compas.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
3° Trace les rayons OA, OB, OC, ..., OI, OJ, ou les diamètres AF, BG, CH, DI et EJ. 4° Construis d'abord le pentagone régulier convexe, inscrit dans le cercle, en joignant les points de division (à partir de B) de 2 en 2, et ce, par un trait plein. 5° Construis ensuite le pentagone régulier étoilé, inscrit dans le cercle, en joignant les points de division (à partir de B) de 4 en 4, et ce, par un trait pointillé. 6° Identifie la corde GH par la lettre d (côté du décagone convexe); la corde GJ par la lettre d' (côté du décagone étoilé); la corde BJ par la lettre p (côté du pentagone convexe); la corde BH par la lettre p' (côté du pentagone étoilé).	Cette suite de constructions permet d'obtenir la figure de la page suivante.	

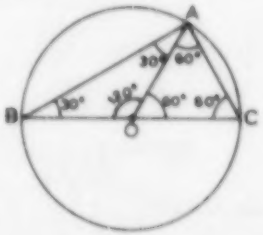
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints



Les triangles GBK et GBJ sont-ils des triangles rectangles? Pourquoi?

Dans ce contexte, la mesure des angles est suffisante.

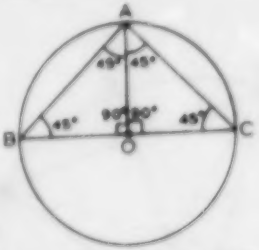
Exemples:



$m\overset{\frown}{AB} = 120^{\circ}$

$m\angle ACB = 60^{\circ}$

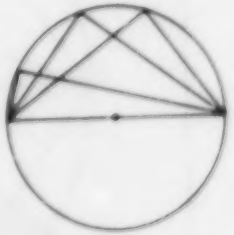
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints



$m\overset{\frown}{AB} = 90^{\circ}$

$m\angle ACB = 45^{\circ}$

Faire mesurer plusieurs angles inscrits dans une demi-circonférence, pour faire découvrir à l'élève que la mesure de l'angle est toujours de 90°.



On verra plus tard que:

> Tout triangle inscrit dans une demi-circonférence (le diamètre étant l'hypoténuse) est un triangle rectangle, car la mesure de l'angle inscrit est égale à la moitié de l'arc intercepté par ses côtés, donc $\frac{180^{\circ}}{2} = 90^{\circ}$.

Les élèves appliquent ensuite la relation de Pythagore dans ces deux triangles rectangles.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

En utilisant les 5 relations définies précédemment, exprime successivement p et p' en fonction de la longueur R du rayon.

$p^2 + d'^2 = \blacksquare^2$ et $p'^2 + d^2 = \blacksquare^2$

③ $\boxed{p^2 + d'^2 = 4R^2}$ et $\boxed{p'^2 + d^2 = 4R^2}$ ④

L'élève doit se rappeler que:

① $\boxed{d' + d = R}$ et $\boxed{R^2 = d \cdot d'}$ ②

$(d' - d)^2 = R^2$ → à partir de 1

$d'^2 - 2d'd + d^2 = R^2$ → car $d'd = R^2$

$d'^2 - 2R^2 + d^2 = R^2$

On obtient alors ⑤ $\boxed{d'^2 + d^2 = 3R^2}$

$p^2 + d'^2 = 4R^2$

$- d'^2 - d^2 = -3R^2$

$p^2 - d^2 = R^2$

et

$p^2 = d^2 + R^2$

et $p'^2 + d^2 = 4R^2$

$- d'^2 - d^2 = -3R^2$

$p'^2 - d'^2 = R^2$

et

$p'^2 = d'^2 + R^2$

$\blacksquare^2 = 4R^2 - \blacksquare^2$

$p^2 = 4R^2 - d'^2$

$p^2 = 4R^2 - \left(\frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)\right)^2$

$p^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}(6 + 2\sqrt{5})$

$p = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

côté du pentagone régulier

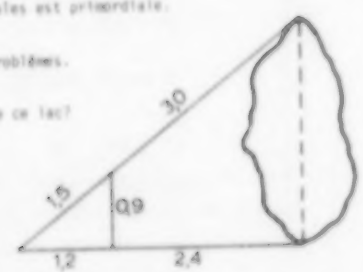
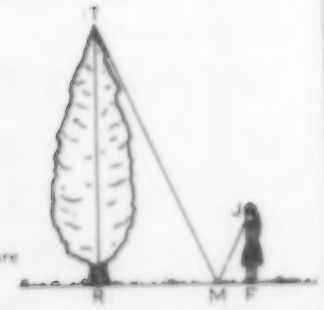
$\blacksquare^2 = 4R^2 - \blacksquare^2$

$p'^2 = 4R^2 - d^2$

$p'^2 = 4R^2 - \left(\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)\right)^2$

$p'^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5})$

$p' = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

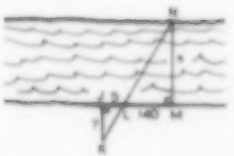
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Les triangles BOX et BGJ sont-ils semblables?	Des sécantes coupées par des parallèles sont partagées en segments proportionnels, et toute parallèle à un côté, passant par un point intérieur d'un triangle, détermine un triangle semblable au premier. C'est une occasion idéale de parler du théorème de Thalès.	
c. Des problèmes	La résolution de nombreux problèmes nécessitant l'utilisation des propriétés des triangles semblables est primordiale. Faire résoudre de nombreux problèmes. a) Quelle est la longueur de ce lac?  b) Louise a décidé de mesurer la hauteur d'un arbre en plaçant un miroir sur le sol entre elle et l'arbre. Elle se place à l'endroit d'où elle peut voir le sommet de l'arbre dans le miroir. Le miroir (M) est à 3 m de l'arbre et Louise est située à 0,25 m 	

tuation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

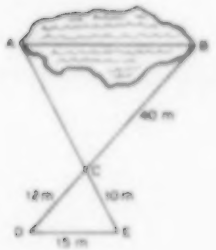
du miroir. Ses yeux sont à 1,52 m du sol. Quelle est la hauteur de cet arbre?

c) Au moment où une personne de 1,8 m projette une ombre de 2,4 m de long, une fusée située à proximité projette une ombre de 48 m de long. Quelle est la hauteur de cette fusée?

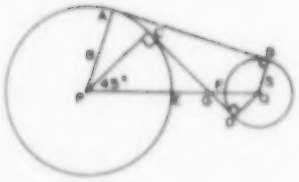
d) Quelle est la largeur de la rivière?



e) Quelle est la largeur de cet étang?



OBJECTIF TERMINAL N° : 3.3 RÉSOUDRE des problèmes issus de situations de la vie courante faisant appel aux relations dans le cercle ou dans le triangle rectangle.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
1. Activité de révision Dans cette figure, les segments AB et CD sont tangents aux ⊙P et ⊙Q. De plus, $\overline{AP}$ = 8 cm, $\overline{BQ}$ = 5 cm et m∠CPE = 45°. (⊙P et ⊙Q signifie des cercles de centre P et Q).  	L'utilisation d'un tel type de problème permet à l'enseignant de réviser ou d'introduire un ensemble de concepts reliés au cercle en général : - rayon, - corde, - diamètre, - tangente, - point de tangence, - sécante, - tangente commune à 2 cercles (interne et externe), - angle au centre, - mesure d'angle au centre, - arc (mineur et majeur), - mesure d'arc (vs mesure d'angle au centre), - etc.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Déterminer la mesure de différents arcs, angles et segments, avant de trouver la mesure de $\overline{AB}$. a) $m\angle PCG$ b) $m\angle CIP$ c) $m\overline{CG}$ d) $m\angle QOE$ e) $m\angle FGD$ f) $m\angle FQD$ g) $m\overset{\frown}{DF}$ h) $m\overset{\frown}{CE}$ i) $m\overline{DG}$ j) $m\overline{DC}$ k) $m\overline{FG}$ l) $m\overline{QO}$ m) $m\overline{FQ}$ n) $m\overline{AB}$ o) etc.	Exploiter d'autres problèmes du même genre.	
2. <u>L'utilisation du décagone et du pentagone réguliers</u>	Les différents problèmes utilisés devraient permettre de comprendre les énoncés ci-dessous et d'en réaliser l'importance dans la résolution de problèmes relatifs au cercle. a) Deux cordes d'un cercle, situées à une même distance du centre, sont congruentes. b) Dans un cercle, tout rayon perpendiculaire à une corde partage celle-ci en deux segments congruents. c) Dans un cercle, tout rayon perpendiculaire à une corde partage l'arc sous-tendu en deux arcs congruents. d) Dans un cercle, des arcs congruents déterminent des cordes congruentes et réciproquement.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	e) Les arcs compris entre deux cordes parallèles sont congruents. f) La mesure d'un angle inscrit est égale à la demi-mesure de l'arc intercepté. g) La mesure d'un angle dont le sommet est à l'intérieur d'un cercle est égale à la demi-somme des mesures des arcs interceptés par les côtés de l'angle et de leur prolongement. h) La mesure d'un angle dont le sommet est à l'extérieur du cercle est égale à la valeur absolue de la demi-différence des mesures en degrés des arcs interceptés par ses côtés. i) Toute tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de tangence. En utilisant le décagone régulier et le pentagone régulier inscrit dans le cercle de 7,5 cm, faire découvrir différentes relations s'appliquant au cercle.	3.3.1 ÉNONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations entre divers arcs ou cordes dans un cercle. 3.3.2 ÉNONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques dans un cercle.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

a) Dans le pentagone régulier, l'élève appelle M, le point de rencontre de $\overline{AC}$ et $\overline{BE}$, et L, le point de rencontre de $\overline{CJ}$ et $\overline{FS}$.

Montre que $o\,\overline{AB} = o\,\overline{CF}$, c'est-à-dire que :

> Deux cordes d'un cercle, situées à une même distance du centre, sont congruentes.

b) Montre que $o\,\overline{CF} = o\,\overline{AE}$, c'est-à-dire que :

> Dans un cercle, tout rayon perpendiculaire à une corde partage celle-ci en deux segments congruents.

c) Montre que $o\,\overset{\frown}{AC} = o\,\overset{\frown}{CB}$, c'est-à-dire que :

> Dans un cercle, tout rayon perpendiculaire à une corde partage l'arc sous-tendu en deux arcs congruents.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

d) Montre que

si $m\overset{\frown}{LA} = m\overset{\frown}{JH}$,

alors $m\overset{\frown}{KD} = m\overset{\frown}{BI}$;

et réciproquement, c'est-à-dire que:

> Dans un cercle, des arcs congruents déterminent des cordes congruentes et réciproquement.

c) Dans le décagone régulier, montre que $m\overset{\frown}{KH} = m\overset{\frown}{BC}$, c'est-à-dire que:

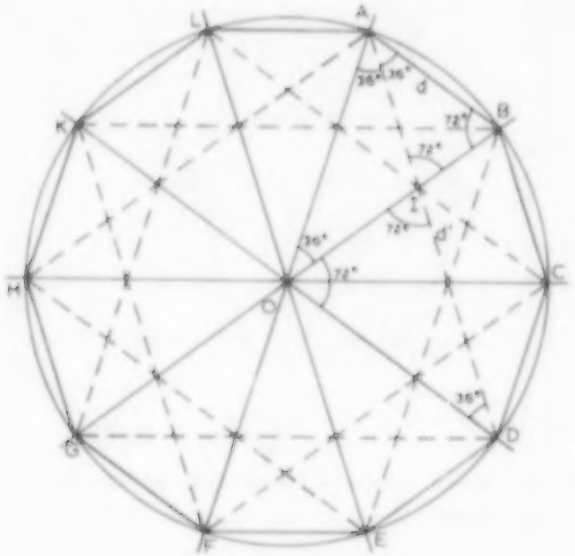
> Les arcs compris entre deux cordes parallèles sont congruents.

f) Dans le décagone régulier, montre que $m\angle ABI = 72°$, soit $\frac{m\overset{\frown}{AI}}{2}$, c'est-à-dire que:

> La mesure d'un angle inscrit est égale à la demi-mesure de l'arc intercepté.

g) Dans le décagone régulier, montre que $m\angle AIB = 72°$, soit $\frac{m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{JH}}{2}$, c'est-à-dire que:

Se servir des mesures obtenues lors de la construction du décagone et du pentagone réguliers.



Situation d'apprentissage

La mesure d'un angle dont le sommet est à l'intérieur d'un cercle est égale à la demi-somme des mesures des arcs interceptés par les côtés de l'angle et de leurs prolongements.

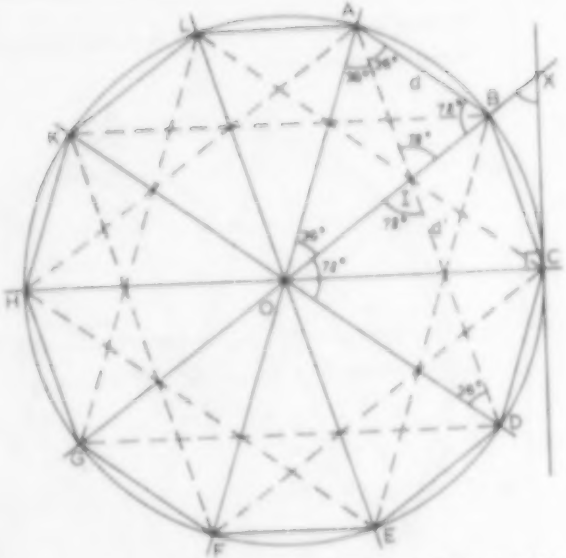
a) Montre que
$m\angle DXC = 54^\circ$, soit $\frac{m\overset{\frown}{DC} + m\overset{\frown}{EB}}{2}$,
c'est-à-dire que:

La mesure d'un angle dont le sommet est à l'extérieur du cercle est égale à la valeur absolue de la demi-différence des mesures en degrés des arcs interceptés par ces côtés.

i) Montre que $m\angle BCD = 90^\circ$ et $\overline{BC} \perp \overline{CD}$,
c'est-à-dire que:

Toute tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de tangence.

Commentaires



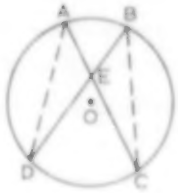
On peut utiliser les fonctions trigonométriques pour démontrer cet énoncé.

Objectifs atteints

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

b) Montre que $\overline{AE} \cdot \overline{EC} = \overline{DE} \cdot \overline{EB}$, c'est-à-dire que:

> Dans un cercle, lorsque deux cordes se coupent, le produit des segments de l'une est égal au produit des segments de l'autre.



c) Montre que $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$, c'est-à-dire que:

> Dans tout quadrilatère inscriptible dans un demi-cercle, la somme des produits des côtés opposés est égal au produit des diagonales.

3. <u>Des problèmes</u>

Faire résoudre des problèmes du genre suivant:

a) Une corde d'un cercle mesure 24 cm et est située à 9 cm du centre de ce cercle. Quel est le rayon de ce cercle?

b) Le diamètre d'un cercle est de 20 cm et une corde de ce cercle mesure 16 cm. A quelle distance du centre de ce cercle est située cette corde?

c) Un hexagone régulier est inscrit dans un cercle de 12 cm. Quelle est la longueur de chaque côté de l'hexagone? A quelle distance du centre est situé chaque côté de l'hexagone?

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

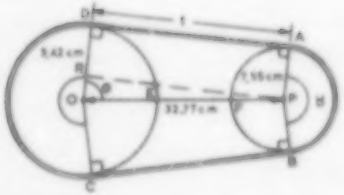
d) Un triangle équilatéral est inscrit dans un cercle de 12 cm. Quelle est la longueur de chaque côté du triangle? À quelle distance du centre est situé chaque côté?

e) Une chèvre est attachée au coin d'une étable de 10 m sur 20 m. Si la corde mesure 25 m de long, trouve l'aire de la région que la chèvre peut brouter.

4.

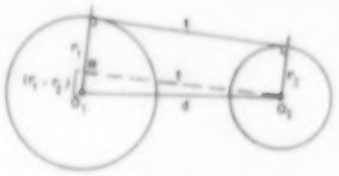
Quelle doit être la longueur maximale d'une courroie reliant deux poulies dont les centres sont distants de 32,77 cm si celles-ci ont 7,53 cm et 9,42 cm de rayon et si un jeu de 1,75% est nécessaire à la courroie afin de permettre un rendement maximal du couple de forces.

La représentation graphique pourrait être la suivante:



Avant d'attaquer ce problème, il faudrait introduire la relation métrique liant ces deux cercles.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints



L'élève doit être amené à découvrir que:

$$t = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

$$d^2 = t^2 + (r_1 - r_2)^2$$

$$t^2 = d^2 - (r_1 - r_2)^2$$

$$t = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

① Trouver t : $t = \sqrt{(32,77)^2 - (9,42 - 7,55)^2} = 32,7166$

② Trouver l'angle α :

$$\tan \alpha = \frac{32,7166}{1,87}$$

$$\tan \alpha = 17,4955$$

17,4955 [INV] [TAN]

$\alpha = 86,7°$

Donc: $\alpha = \widehat{DEC} = 173,4573°$

et $\alpha = \widehat{DC} = 186,5426°$

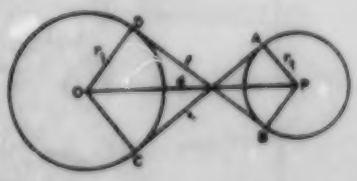
③ Trouver l'angle γ :

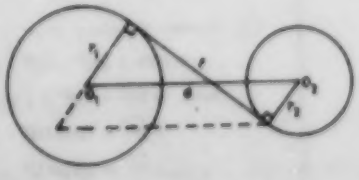
$$\gamma = \angle DFA = 180° - 90° - 86,7267° = 3,2713°$$

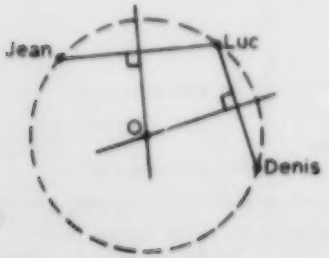
Donc: $\gamma = \widehat{AFB} = 180° + 2 \times 3,2713° = 186,5426°$

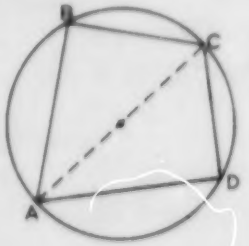
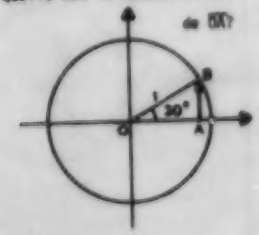
$\gamma = \widehat{AB} = 173,4573°$

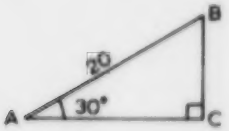
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	④ Trouver $m\overset{\frown}{DC}$: $C = 2\pi r = 2\pi(9,42) = 59,1876$ $m\overset{\frown}{DC} = \frac{186,5426}{360} \times 59,1876 = 30,6695$ ⑤ Trouver $m\overset{\frown}{AB}$: $C = 2\pi r = 2\pi(7,55) = 47,438$ $m\overset{\frown}{AB} = \frac{173,4573}{360} \times 47,438 = 22,8569$ ⑥ Le total : $m\overset{\frown}{CD} + m\overset{\frown}{DK} + m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{BC} = T$ $T = 30,6695 + 32,7166 + 22,8569 + 32,7166$ $T = 118,9596$ ⑦ Ajout de 1,751 : $118,9596 + 2,0818 = 121,0414$	
Qu'arriverait-il dans la situation précédente si le courroie était disposée de la façon ci-dessous?	Avant d'attaquer ce problème, il faudrait introduire la relation métrique liant ces deux cercles.	



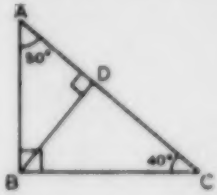
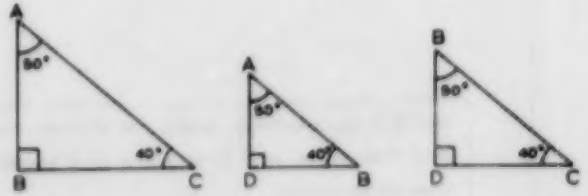


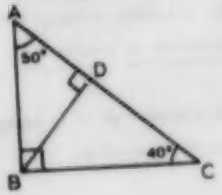
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	$d^2 = t^2 + (r_1 + r_2)^2$ $t^2 = d^2 - (r_1 + r_2)^2$ $t = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$	
5. <u>Inscription de polygones dans un cercle</u> Trois de tes amis sont dans un champ. Où dois-tu te placer pour être à égale distance de chacun de tes amis?		3.3.4 INSCRIRE un polygone dans un cercle.
	Faire réaliser la construction par les élèves, en bissectant les segments JL et LD; discuter du fait que la médiatrice du segment est un lieu géométrique possédant une propriété particulière fort importante.	
Serait-ce possible si tu avais quatre amis dans ce champ? Si oui, à quelle condition pourrais-tu trouver l'endroit où tu dois te placer?	Démontrer que les angles opposés du quadrilatère doivent être supplémentaires pour que le quadrilatère soit inscriptible.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	 $m\overset{\frown}{BAD} + m\overset{\frown}{BCD} = 360^\circ$ et $m\overset{\frown}{CBA} + m\overset{\frown}{CDA} = 360^\circ$	
À quelle condition peut-on inscrire un polygone quelconque dans un cercle?	L'ensemble des médiatrices se rencontrent en un même point.	
Qu'arrive-t-il si le polygone est concave?	Le polygone doit être concave.	
Qu'arrive-t-il si le polygone est régulier?	Tous les polygones réguliers sont inscriptibles.	
	Rappeler la construction du décagone régulier et du pentagone régulier.	
6. Activités de découverte		3.3.5
a) Quelle est la mesure de $\overline{AB}$? de $\overline{BA'}$?	Utiliser les fonctions trigonométriques.	ÉNONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques relatives à la hauteur dans un triangle rectangle.
		

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
b) Quelle est la mesure de $\overline{BC}$? de $\overline{AC}$?  Que peut-on conclure de ces deux activités?	Dans un triangle rectangle, le côté opposé à un angle de 30° mesure la moitié de l'hypoténuse.	
Comment peut-on résoudre les deux problèmes suivants? a) Deux observateurs se font face et regardent un ballon selon des angles d'élévation de 27° et 63°. Quelle est la hauteur du ballon, si ces deux observateurs sont respectivement à 143 m et 37,125 m de la verticale du ballon. La situation pourrait se représenter ainsi:		

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
 f) Un observateur veut connaître la hauteur d'un édifice. Sous un premier angle d'élévation de 20^0, il est à 120 m de l'édifice, tandis que lorsqu'il observe l'édifice sous un angle d'élévation de 70^0, il est à 15,887 m. Avec ces renseignements, peut-il calculer la hauteur de l'édifice sans utiliser les notions de trigonométrie. La situation peut être présentée par: où, à la suite d'une réflexion, en se servant de la hauteur comme axe de symétrie: 	Laisser les deux problèmes de côté et effectuer d'abord les activités qui vont suivre.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
7.	D'autres relations importantes peuvent être dégagées, à partir du concept de triangles semblables.	
Les triangles ABC, ABD et BCD sont-ils semblables?		
	De cette activité, on peut déduire que:	
	Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse détermine des triangles semblables au premier.	
	L'enseignant utilise le triangle précédent et il le décompose de façon à bien visualiser les trois triangles semblables.	
		
	(Ne pas oublier que $\overline{BD}$ est la hauteur relative à l'hypoténuse.)	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Peut-on affirmer que $\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{AD}}$?	Utiliser cette situation pour rappeler les notions suivantes: - rapport, - proportion, - moyens, - extrêmes, - 4e proportionnelle, - moyenne proportionnelle.	
	Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.	
	 Alors $\overline{DB}^2 = \overline{DC} \cdot \overline{AD}$	
Peut-on affirmer que $\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}$?		
Peut-on affirmer que $\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$?	Dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse entière.	

CONTENU NOTIONNEL

Le tableau suivant présente la liste des objectifs de l'option II (064-534) qui satisfont aux exigences de l'ordre collégial concernant les préalables mathématiques.

OBJECTIFS TERMINAUX OU INTERMÉDIAIRES	
064-534* ou 564-534*	064-531 ou 564-531
1.1 -La parabole, le cercle, l'ellipse et l'hyperbole centrés à l'origine. -La parabole et le cercle non centrés à l'origine.	1.1 -L'ellipse et l'hyperbole non centrées à l'origine. 1.2 1.3
2.1 -Degré inférieur à 3. 2.1.1 à 2.1.4 2.1.6 à 2.1.10 2.1.12 2.2 -À l'exception des fonctions rationnelles, demi-cercle et demi-ellipse. 2.2.1 à 2.2.5 2.2.8 2.3.1 à 2.3.10 2.3.14 et 2.3.15 2.3.17 et 2.3.18	2.1 -Degré 3. 2.1.5 2.1.11 2.2 -Les fonctions rationnelles, demi-cercle et demi-ellipse. 2.2.6 et 2.2.7 2.3.11 à 2.3.13 2.3.16
3.1 3.2 3.3	

*En plus des cours 064-414 ou 564-414, les objectifs des cours 064-434 ou 564-434 et 064-534 ou 564-534 des programmes d'études de l'option I et de l'option II sont nécessaires pour satisfaire aux exigences de l'ordre collégial concernant les préalables mathématiques.

OBJECTIF GÉNÉRAL

N°: 1

FAVORISER chez l'élève une meilleure interprétation du réel à partir des relations binaires.

Thème: . Lieux géométriques
. Relations

Durée: 20% du temps

OBJECTIF GÉNÉRAL N°: 1 FAVORISER chez l'élève une meilleure interprétation du réel à partir des relations binaires

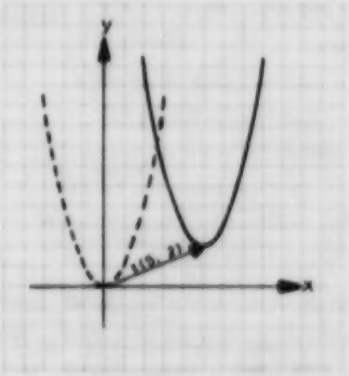
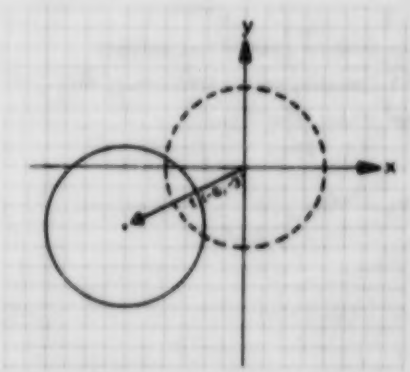
Cet objectif se veut une poursuite de l'objectif terminal 3.3 de l'option I. Les élèves ont étudié les notions concernant la droite et la parabole dont le sommet est à l'origine (434). Ils ont peut-être vu les notions concernant le cercle, l'ellipse et l'hyperbole centrées à l'origine (431). Il faut maintenant continuer cette étude des coniques en examinant en profondeur la parabole (sommet à l'origine ou non) et le cercle (centré à l'origine ou non) ainsi que la tangente au cercle. Quant aux ellipses et aux hyperboles, les élèves qui suivent le cours 534 doivent les voir centrées à l'origine; les élèves inscrits au cours 531 couvrent aussi les notions concernant ces deux dernières non centrées à l'origine. Les objectifs terminaux 1.2 et 1.3 appartiennent en propre au cours 531. Il faut aussi mentionner que les objectifs 3.3.6 à 3.3.15 (431) sont inclus dans les objectifs 1.1.1 à 1.1.11 de l'option II (534). Des précisions vous seront données à chaque objectif intermédiaire de ce cours.

OBJECTIF TERMINAL N° : 1.1 RÉSOUDRE des problèmes utilisant des lieux géométriques associés aux relations du second degré dans le plan cartésien

L'étude de la parabole s'avère nécessaire, puisque les élèves n'ont étudié que le cas particulier où le sommet de la parabole est à l'origine. L'objectif 1.1, "Résoudre des problèmes utilisant des lieux géométriques associés aux relations du second degré dans le plan cartésien", ainsi formulé, nous porte à insister sur la notion de lieu géométrique. Vous le constaterez lors de la formulation des définitions des différentes coniques. Si on examine l'équation générale du second degré "$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$", un seul cas (lorsque $B \neq 0$) n'est pas à l'étude (534-531), puisqu'il exige comme acquis des notions de trigonométrie que l'élève ne connaît pas encore. Ce qui veut dire que les coniques étudiées auront toujours leurs axes de symétrie parallèles aux axes du plan cartésien et que l'équation générale qui sera associée à ces coniques aura la forme "$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$", puisque B aura toujours la valeur 0.

L'existence de certains didacticiels peuvent aider les élèves à construire plus rapidement les coniques, à identifier certaines propriétés communes à plusieurs courbes, etc.

OBJECTIF TERMINAL N°: 1.1 RÉSOUDRE DES PROBLÈMES UTILISANT DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES ASSOCIÉS AUX RELATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS LE PLAN CARTÉSIEN.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.1 Étant donné une parabole dont le sommet est à l'origine, TRACER son image par une translation et 1.1.2 Étant donné un cercle, une ellipse ou une hyperbole centrés à l'origine, TRACER son image par une translation.	- Ces deux objectifs peuvent servir d'amorce aux objectifs qui suivent. Le contenu concernant la parabole, le cercle, l'ellipse et l'hyperbole centrés à l'origine est décrit à l'objectif 3.3 de l'option I et le cours de base (programme 16-3302, objectif 2.1) a appris aux élèves à construire des images par translation. - Les notions se rapportant à (au): • la parabole dont le sommet est à l'origine, • cercle centré à l'origine, • l'ellipse centrée à l'origine, • l'hyperbole centrée à l'origine, } guide 16-3303-01, pages 269 à 291 • la translation. guide 16-3302-02, pages 19 à 25 - Voici quelques exemples de coniques centrées à l'origine qui subissent une translation. A. Une parabole  B. Un cercle 

Objectifs intermédiaires

1.1.1

Étant donné une parabole dont le sommet est à l'origine, TRACER son image par une translation. (suite)

et

1.1.2

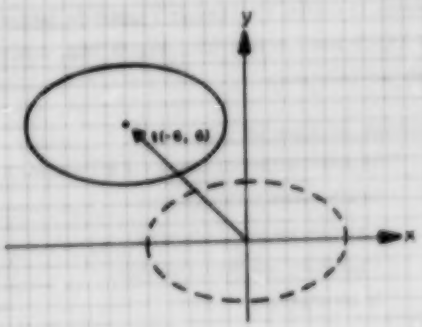
Étant donné un cercle, une ellipse ou une hyperbole centrés à l'origine, TRACER son image par une translation. (suite)

1.1.3

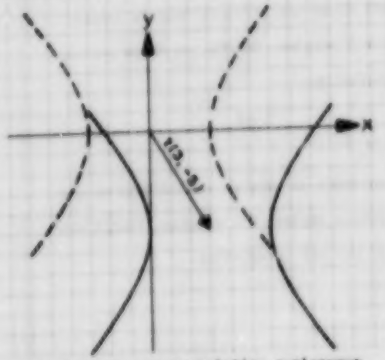
Étant donné une parabole dont le sommet est à l'origine, TROUVER l'équation de son image par une translation.

Commentaires

C. Une ellipse



D. Une hyperbole



- Il ne s'agissait que de tracer l'image point par point d'une conique par une translation quelconque.

- À l'objectif 3.1.1 de l'option I, on a vu que l'équation de la parabole dont le sommet est à l'origine peut avoir la forme:

  $y^2 = 4ax$, avec le foyer F en (a, 0);

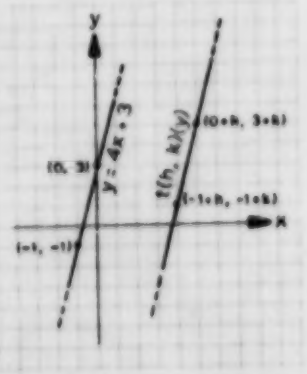
  $x^2 = 4ay$, avec le foyer F en (0, a).

On commence par examiner une droite translatée:

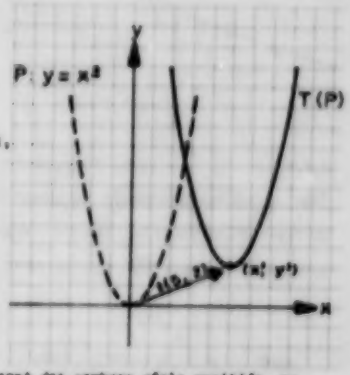
Soit $y = 4x + 3$ et une translation (h, k).

Quelle est l'équation de $y = 4x + 3$ lorsqu'on applique la translation t(h, k)?

On sait que la droite translatée [t(h, k)y] possède la même pente que $y = 4x + 3$ (conservation du parallélisme). Elle a donc la forme $y = 4x + c$. On trouve la valeur de c en fonction de h et k.



Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.3 Étant donné une parabole dont le sommet est à l'origine, TROUVER l'équation de son image par une translation. (suite)	L'équation de la droite translatée (m = 4 et un point (0 + h, 3 + k)) de la forme $y = 4x + c$ est: $y = 4x + (3 + k - 4h)$ puisque $c = 3 + k - 4h$. On la transforme: $(y - k) = 4(x - h) + 3$. En comparant avec la droite donnée: $y = 4x + 3$, on peut conclure que: lorsque $y = 4x + 3$, $t(h, k)y : y - k = 4(x - h) + 3$. Les points (1, 2), (2, 3) et (3, 4) par la translation t (1, 5) deviennent (2, 7), (3, 8) et (4, 9). Simultanément, les axes sont translatés et l'origine du nouveau système est (1, 5). Si l'on appelle (0, 0) l'origine du nouveau système d'axes, alors les points (2, 7), (3, 8) et (4, 9) deviennent (2 - 1, 7 - 5), (3 - 1, 8 - 5) et (4 - 1, 9 - 5) i.e. (1, 2), (2, 3) et (3, 4). D'où en généralisant t (h, k): (x, y) devient (x - h, y - k). - Maintenant, on veut trouver l'équation d'une parabole translatée. Soit $y = x^2$ et une translation (5, 2). - On connaît $x^2 = 4ay$. - Si on regarde la parabole translatée en fonction de h et k, on peut dire que: $x' = x + 5$ et $y' = y + 2$. - Que valent x et y en fonction de x' et y': $x = x' - 5$ et $y = y' - 2$? - Par substitution dans $x' = 4ay$, $(x' - 5)^2 = 4a(y' - 2)$. - Sachant que x et x' sont des nombres réels et que y et y' sont des nombres réels positifs, on peut remplacer y' et x' par y et x. - Donc $(x - 5)^2 = 4a(y - 2)$ représente l'image d'une translation (t(5, 2)) de la parabole $x^2 = 4ay$.



Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.3 Etant donné une parabole dont le sommet est à l'origine, TROUVER l'équation de son image par une translation. (suite)	- Cas général: - On suit la même démarche pour une translation quelconque t(h, k) lorsque $y = x^2$. - On connaît $x^2 = 4ay$ (forme de l'équation de la parabole centrée à l'origine). - Regardons la parabole translatée en fonction de h et k, nous pouvons dire que: $x' = x + h$ et $y' = y + k$. - On trouve la valeur de x et y en fonction de x' et y': $x = x' - h$ et $y = y' - k$. - Par substitution dans $x^2 = 4ay$: $(x' - h)^2 = 4a(y - k)$. - Sachant que x et x' sont des nombres réels et que y et y' sont des réels positifs, on peut remplacer y' et x' par y et x. Donc $(x - h)^2 = 4a(y - k)$ représente l'image de la parabole $x^2 = 4ay$ translatée de (h, k).
	- ENRICHISSEMENT Elaborer un programme d'ordinateur qui donne l'équation de toute parabole translatée.
1.1.4 Etant donné les coordonnées du sommet et du foyer d'une parabole, TROUVER l'équation associée à son lieu et vice versa.	- Rappel de la définition de la parabole. La parabole est le lieu des points équidistants d'une droite appelée *directrice* et d'un point fixe appelé *foyer*. - Il faut aussi rappeler que la droite perpendiculaire à la directrice passant par le foyer s'appelle l'*axe* de la parabole et que le *sommet* de la parabole est son point de rencontre avec son axe. - Voici une démarche possible pour trouver l'équation d'une parabole connaissant les coordonnées du sommet et du foyer.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.4 Etant donné les coordonnées du sommet et du foyer d'une parabole, TROUVER l'équation associée à son lieu et vice versa. (suite)	

Trouver l'équation de la parabole dont les coordonnées du sommet sont (-4, 2) et celles du foyer sont (-3, 2).

1. À partir de la définition de la parabole, on peut dire que:

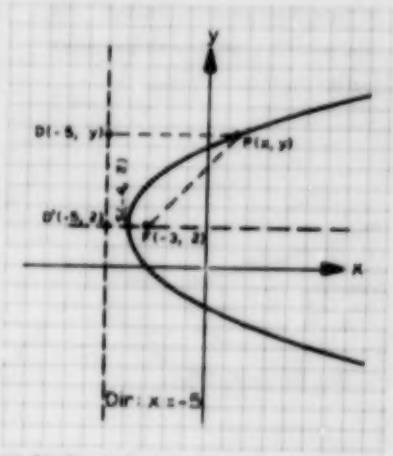
   $d(F, P) = d(D, P)$.

2. Pour trouver les longueurs de ces segments, on doit connaître les coordonnées du point D qui appartient à la directrice.

3. Pour connaître les coordonnées de D, on doit trouver l'équation de la directrice (Dir). Cette équation se trouve en examinant l'axe de la parabole aux points S et F donnés.

   $d(S, F) = d(S, D')$ (déf. de la parabole)

   Alors les coordonnées de D' sont (-5, 2), d'où l'équation de la directrice est: $x = -5$.



4. Revenir à $d(F, P) = d(D, P)$, puisqu'on connaît les coordonnées de F et de D.

   Alors $\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+5)^2 + (y-y)^2}$

   $(x+3)^2 + (y-2)^2 = (x+5)^2$

   $x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 10x + 25$

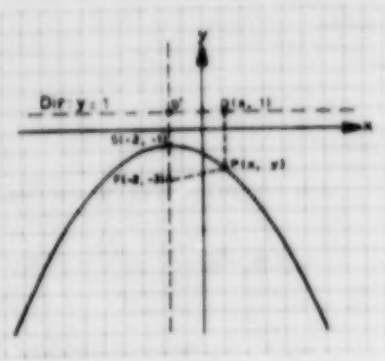
   Donc $\boxed{y^2 - 4y - 4x - 12 = 0}$

Il faudrait trouver une équation équivalente plus significative, c'est-à-dire de la forme $y^2 = 4ax$ qu'on connaît et qui représente une parabole dont le sommet est à l'origine.

On transforme: $y^2 - 4y + 4 = 4x + 16$,

pour obtenir $(y-2)^2 = 4(x-(-4))$.

En examinant la donnée du problème, on remarque que le sommet a comme coordonnées (-4, 2).

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.4 Etant donné les coordonnées du sommet et du foyer d'une parabole, TROUVER l'équation associée à son lieu et vice versa. (suite)	et que l'équation trouvée $(y - 2)^2 = 4(x - (-4))$ contient ces coordonnées. Ce qui correspond à la translation t(-4, 2) de la parabole centrée à l'origine. Est-ce toujours le cas? Il faudrait examiner plusieurs exemples et généraliser. La démarche est la même pour le cas où l'axe de la parabole est vertical au lieu d'horizontal, comme l'exemple précédent.  - ENRICHISSEMENT On pourrait examiner le cas où l'axe de la parabole est une oblique qui forme un angle de 45° avec l'axe des "x" du système cartésien. Trouver l'équation de la parabole qui a comme foyer (1, -2), dont le sommet passe par (-2, 1). Appliquer la même démarche: 1. d(F, P) = d(P, D).

Objectifs intermédiaires	Commentaires

1.1.4

Étant donné les coordonnées du sommet et du foyer d'une parabole, TROUVER l'équation associée à son lieu et vice versa. (suite)

2. Pour trouver d(P, D), on connaît la formule de la distance d'un point à une droite (obj. 3.2.12, option I): $\frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

3. On trouve alors l'équation de la directrice puisqu'on connaît F et S (donnés) et Dir $\perp$ FS.

   • Équation de l'axe de la parabole

   $\frac{y - 2}{x - (-1)} = \frac{2 - 1}{(-1) - (-2)}$, $y = x + 3$

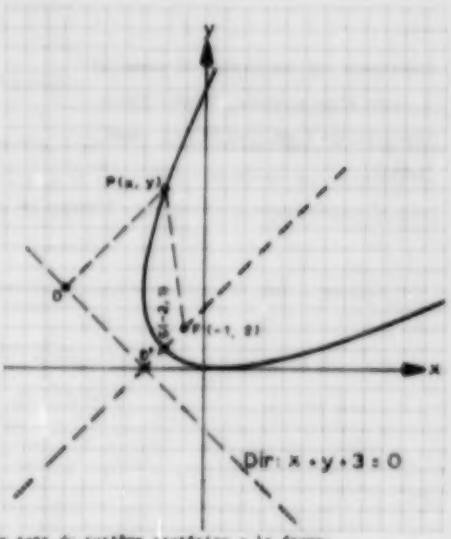
   • Dir étant $\perp$, $y = -x - 3$

4. On peut maintenant appliquer

   $$d(F, P) = d(P, D)$$

   $$\sqrt{(x - (-1))^2 + (y - 2)^2} = \frac{|x + y + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

   Ce qui donne: $x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 14y + 1 = 0$

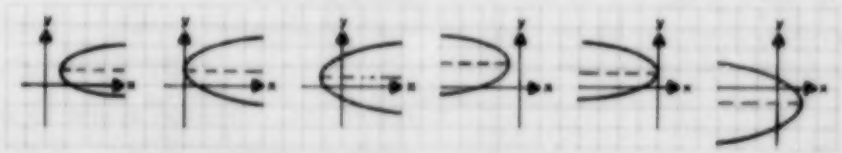


En résumé:

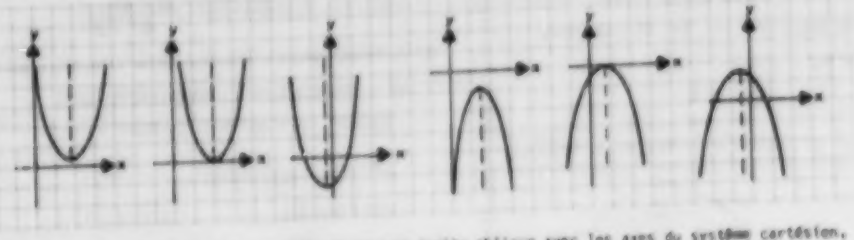
• L'équation des paraboles dont l'axe est parallèle aux axes du système cartésien a la forme:

ou $\left.\begin{matrix}(y - k)^2 = 4a(x - h) \\ (x - h)^2 = 4a(y - k)\end{matrix}\right\}$ lorsque (h, k) est le sommet de la parabole et |a| est la distance entre le foyer et le sommet.

Lorsque l'équation de la parabole est de la forme $(y - k)^2 = 4a(x - h)$, son axe de symétrie est parallèle à l'axe des "x". Cette forme est équivalente à $x = Ay^2 + By + C$.



Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.4 Étant donné les coordonnées du sommet et du foyer d'une parabole, TROUVER l'équation associée à son lieu et vice versa. (suite)	• Lorsque l'équation de la parabole est $(x - h)^2 = 4a(y - k)$, son axe de symétrie est parallèle à l'axe des "y". Cette forme est équivalente à $y = Ax^2 + Bx + C$.



Lorsque l'axe de symétrie de la parabole forme une droite oblique avec les axes du système cartésien, l'équation a la forme $x^2 + y^2 + cxy + dx + ey + f = 0$.

Au lieu de faire la démarche au complet chaque fois que nous devons trouver l'équation d'une parabole lorsque son axe de symétrie est parallèle à un des axes cartésiens, nous pouvons appliquer directement la forme canonique trouvée lorsqu'on a le sommet et le foyer.

Ex.: Trouver les équations des paraboles suivantes lorsque:

1. le sommet est S(2, 1) et que le foyer se situe au point F(2, 2);
2. le sommet est S(-3, -1) et que le foyer se situe au point F(-1, -1).

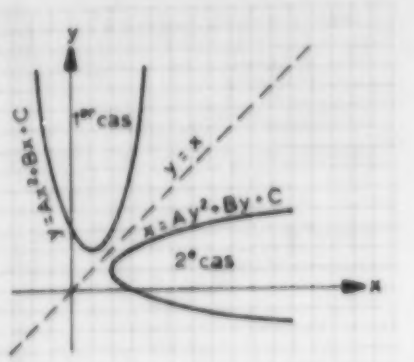
Exemple de démarche à l'aide de la forme canonique:

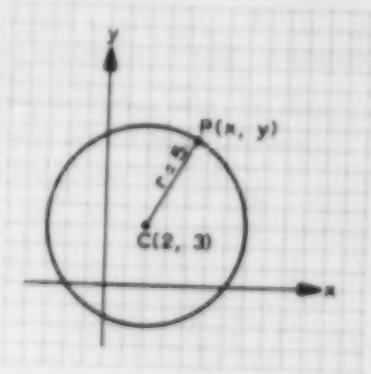
1. S(2, 1) et F(2, 2) en plaçant ces points sur un système d'axes cartésiens, on voit que l'axe de symétrie de la parabole est parallèle à l'axe "y".
   On doit se servir de $(x - h)^2 = 4a(y - k)$, où (h, k) est le sommet et |a| la distance entre F et S.

$$(x - 2)^2 = 4 \cdot 1(y - 1) \Longrightarrow y = \frac{x^2}{4} - x + 2$$

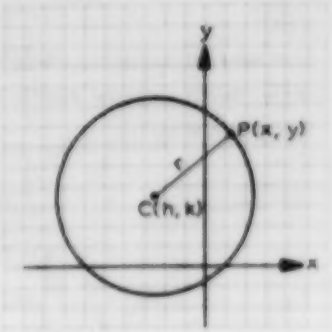
2. S(-3, -1), F(-1, -1) en plaçant ces points sur un système d'axes cartésiens, on voit que l'axe de la parabole est parallèle à l'axe des "x". On doit se servir de $(y - k)^2 = 4a(x - h)$, où (h, k) est le

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.4 Étant donné les coordonnées du sommet et du foyer d'une parabole, TROUVER l'équation associée à son lieu et vice versa. (suite)	sommet et |a|, la distance entre F et S. $(y+1)^2 + 4 = 2(x-3) \rightarrow x = \frac{y^2}{8} + \frac{y}{4} - \frac{23}{8}$ - Lorsque l'équation de la parabole est donnée et qu'on doit trouver le sommet et le foyer, on transforme ces équations sous les formes $y = Ax^2 + Bx + C$ ou $x = Ay^2 + By + C$. Éviter de donner des équations de paraboles dont l'axe est oblique par rapport aux axes du système, c'est à-dire qui contiennent un terme en xy. 1er cas: Équations du genre $y = Ax^2 + Bx + C$ (on emploie des majuscules afin de bien comprendre la différence entre a et A). • On transforme cette équation sous la forme canonique $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ où (h, k) est le sommet et |a|, la distance entre le foyer et le sommet. $y = Ax^2 + Bx + C$ $\frac{y}{A} = x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}$ $\frac{y}{A} - \frac{C}{A} + \left(\frac{B}{2A}\right)^2 = x^2 + \frac{B}{A}x + \left(\frac{B}{2A}\right)^2$ $\frac{1}{A}\left(y + \frac{-4AC + B^2}{4A}\right) = \left(x + \frac{B}{2A}\right)^2$ Le sommet est donc: $S\left(-\frac{B}{2A}, \frac{-B^2 + 4AC}{4A}\right)$ • Les coordonnées du foyer se trouvent à l'aide de la constante a de $(x-h)^2 = 4a(y-k)$. On sait que l'axe de la parabole est parallèle à l'axe des "y" à cause de la forme de l'équation donnée. Alors l'abscisse du foyer est la même que l'abscisse du sommet et, pour l'ordonnée du foyer, il faut ajouter à l'ordonnée du sommet la valeur de a. On peut donc dire que les coordonnées du foyer d'une parabole de forme $y = Ax^2 + Bx + C$ sont: $F\left(-\frac{B}{2A}, \frac{4AC - B^2 + 1}{4A}\right)$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.4 Étant donné les coordonnées du sommet et du foyer d'une parabole, TROUVER l'équation associée à son lieu et vice versa. (suite)	2^{e} cas: Équations du genre $x = Ay^2 + By + C$. Suivant la même démarche, on constate que les coordonnées du sommet et du foyer sont: $F: \left(\frac{-B^2 + 4AC + 1}{4A}, \frac{-B}{2A}\right)$ $S: \left(\frac{-B^2 + 4AC}{4A}, \frac{-B}{2A}\right)$ Ce 2^{e} cas donne une parabole qui est symétrique au 1er cas par rapport à la droite (axe de symétrie) $y = x$.  Les élèves peuvent maintenant compléter le tableau-synthèse. On leur donne les colonnes "coniques et équations" et on leur demande de compléter les autres colonnes. ENRICHISSEMENT 3^{e} cas: Équations du genre $x^2 + y^2 + Bxy + Dx + Ey + F = 0$ où $B \neq 0$. Les élèves peuvent tracer la parabole qui correspond à l'équation donnée, mais ils ne pourront pas trouver la valeur exacte des coordonnées des points sommet et foyer avec les connaissances qu'ils ont. Ils pourraient peut-être tracer l'axe de symétrie de la parabole en superposant une partie de la courbe sur l'autre. Ainsi ils trouveront des valeurs approximatives pour les coordonnées du sommet.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.5 Étant donné le rayon et le centre d'un cercle, **TROUVER** l'équation associée à son lieu et vice versa.	- Revenir sur la définition du cercle. Le cercle est le lieu des points équidistants d'un point fixe appelé le centre du cercle. On doit aussi définir le rayon du cercle. C'est la distance qui sépare les points du cercle de son centre. Donc le rayon est toujours un nombre réel positif puisque c'est une distance. - L'équation canonique du cercle centré à l'origine est présentée à l'objectif 3.3.6, option I, aux pages 277-278: $x^2 + y^2 = r^2$. - À partir d'un exemple, voici une démarche pour trouver l'équation d'un cercle non centré à l'origine. Soit un cercle de rayon 5 unités dont le centre se situe au point (2, 3). Quelle est l'équation qui représente ce cercle? 1. On applique la définition du cercle: $d(C, P) = r$. $\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 5$ (Pythagore) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$ (Cette équation représente l'image d'un cercle centré à l'origine qui a subi une translation t(2, 3).) 2. En comparant cette équation à celle du cercle centré à l'origine ($x^2 + y^2 = r^2$), on remarque qu'elle contient en plus les coordonnées du centre du cercle (2, 3). Est-ce toujours le cas?  - On regarde plusieurs exemples et on généralise: Soit un cercle de centre (h, k) et de rayon r. Trouver l'équation canonique qui correspond à ce lieu géométrique.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.5 Étant donné le rayon et le centre d'un cercle, TROUVER l'équation associée à son lieu et vice versa. (suite)	$d(C, P) = r$ (définition du cercle) $\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r^2$ (Pythagore) $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, où (h, k) est le centre, r est le rayon. Cette équation représente le cercle de centre (h, k) et de rayon r. On peut donc dire que le lieu des points définis par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}$ représente un cercle de centre (h, k) et de rayon r.



- Lorsque l'équation est donnée et qu'on doit trouver le centre du cercle et la longueur du rayon, on peut procéder de la façon suivante:
  - Transformer l'équation donnée (si nécessaire) en équation de la forme $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.
  - Identifier les coordonnées du centre et la longueur du rayon.

Exemple 1. Trouver les coordonnées du centre du cercle et la longueur du rayon de

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + y^2 - 6y - 12 = 0\}$.

- Transformer:

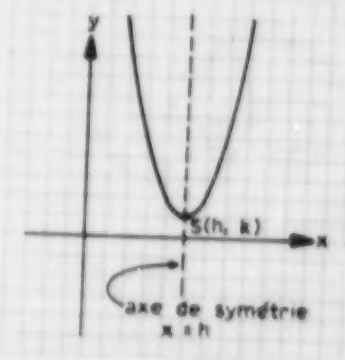
$$x^2 - 4x + y^2 - 6y = 12$$

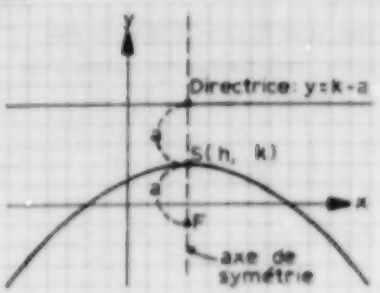
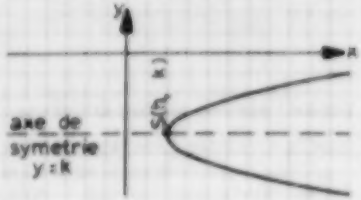
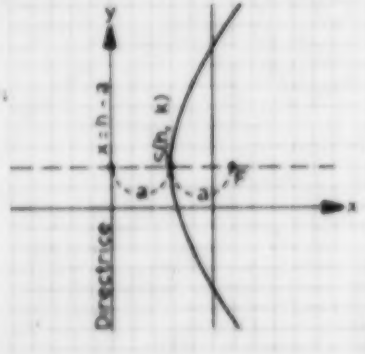
$$x^2 - 4x + \boxed{4} + y^2 - 6y + \boxed{9} = 12 + \boxed{4} + \boxed{9}$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

- Donc: le centre se situe au point $(2, 3)$;
  la longueur du rayon est de 5 unités.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.5 Étant donné le rayon et le centre d'un cercle, TROUVER l'équation associée à son lieu et vice versa. (suite)	Exemple 2. Quelle est la longueur du rayon du cercle représenté par $((x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 10x + y^2 + 9 = 0)$ et où se trouve son centre? - Transformer: ① $x^2 + 10x + y^2 = -9$ $x^2 + 10x + \boxed{25} + y^2 = -9 + \boxed{25}$ $(x + 5)^2 + y^2 = 4^2$ - Donc: la longueur du rayon est de 4 unités; le centre du cercle se situe au point (-5, 0). Faire remarquer que ① est de forme générale $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, dans laquelle $D = 10$, $E = 0$ et $F = 9$.
1.1.6 TROUVER l'équation de l'axe de symétrie ou de la directrice d'une parabole donnée.	- On étudie les cas où l'axe de symétrie est parallèle aux axes du système de coordonnées cartésiennes. - Les élèves connaissent les équations de l'axe de symétrie et de la directrice (obj. 3.3.2, option I) de la parabole dont le sommet est à l'origine. Il faut les amener à découvrir les équations de ces dernières lorsque le sommet de la parabole n'est pas à l'origine du système cartésien. - Lorsque l'équation donnée de la parabole se ramène à la forme canonique $(x - h)^2 = 4a(y - k)$, où (h, k) est le sommet et $\lvert a \rvert$, la distance du sommet au foyer, on peut trouver l'équation de l'axe de symétrie de la parabole assez facilement. Alors l'axe de symétrie est parallèle à l'axe "y" et il passe par le sommet (h, k); on dit que l'équation de l'axe de symétrie de la parabole est $\boxed{x = h}$.



Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.6 **TROUVER** l'équation de l'axe de symétrie ou de la directrice d'une parabole donnée. (suite)	- Pour trouver l'équation de la directrice avec les mêmes données, il faut: 1° trouver dans l'équation $(x - h)^2 = 4a(y - k)$ la valeur de a; 2° puisque la directrice est perpendiculaire à l'axe de la parabole et qu'elle se situe à égale distance (sommet-foyer), on dit que l'équation de la directrice est $\boxed{y = k - a}$. Attention au signe de a, à vérifier en examinant le graphique.  - Si l'équation donnée peut se transformer selon la forme $(y - k)^2 = 4a(x - h)$, on peut trouver l'équation de l'axe de symétrie de la parabole en disant que l'axe de la parabole est parallèle à l'axe des "x" et qu'il passe par le sommet (h, k). L'équation de la droite qui représente l'axe est donc $\boxed{y = k}$.  - Quant à l'équation de la directrice de cette parabole $(y - k)^2 = 4a(x - h)$, on doit: 1° trouver la valeur de a dans l'équation $(y - k)^2 = 4a(x - h)$; 2° sachant que la directrice est perpendiculaire à l'axe de la parabole et qu'elle se situe à égale distance (sommet-foyer), on peut affirmer que l'équation de la directrice de la parabole est $\boxed{x = h - a}$. 

Objectifs intermédiaires

1.1.6

TROUVER l'équation de l'axe de symétrie ou de la directrice d'une parabole donnée. (suite)

1.1.7

Étant donné un cercle, une ellipse ou une hyperbole centrés à l'origine, TROUVER l'équation canonique ou générale de son image par une translation.

Commentaires

- Voici un tableau qui vous présente les équations des axes de symétrie et des directrices, selon les différentes formes d'équations se rapportant à la parabole. Il serait intéressant que les élèves remplissent eux-mêmes le tableau, au lieu de l'avoir tout fait, et, si on veut qu'ils aient une vue d'ensemble de tous les éléments de la parabole, on peut y ajouter deux autres colonnes: coordonnées du foyer et coordonnées du sommet.

Équation de la forme	Axe de symétrie	Directrice
$y^2 = 4ax$	$y = 0$	$x = -a$
$x^2 = 4ay$	$x = 0$	$y = -a$
$(y - k)^2 = 4a(x - h)$	$y = k$	$x = (h - a)$
$(x - h)^2 = 4a(y - k)$	$x = h$	$y = (k - a)$
$x = Ay^2 + By + C$	$y = -\frac{B}{2A}$	$x = \frac{4AC - B^2 - 1}{4A}$
$y = Ax^2 + Bx + C$	$x = -\frac{B}{2A}$	$y = \frac{4AC - B^2 - 1}{4A}$

- CERCLE

Équation canonique du cercle

À partir de la définition du cercle, on dit que:

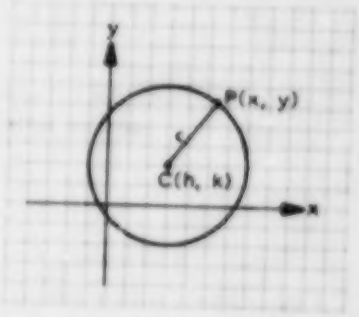
$d(C, P) = r$, si (h, k) est le centre.

Alors

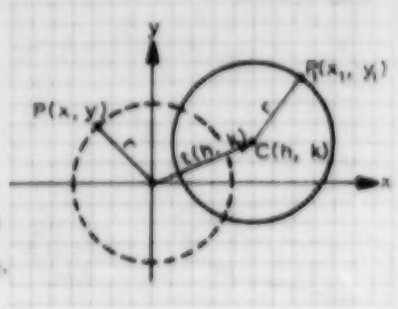
$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

$$\boxed{(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2}$$ Objectif 1.1.5 de ce cours

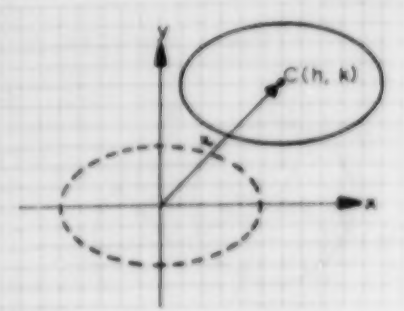
Cette forme prend le nom d'équation canonique du cercle.



Si le centre du cercle est l'origine (0, 0), on applique l'équation canonique du cercle et on obtient:

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.7 Étant donné un cercle, une ellipse ou une hyperbole centrés à l'origine, TROUVER l'équation canonique ou générale de son image par une translation. (Suite)	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$ $x^2 + y^2 = r^2$ Cette équation est connue des élèves (obj. 3.3.6, option I). Elle correspond à l'équation du cercle centré à l'origine. Maintenant on s'attarde à la translation $t(h, k)$ d'un cercle centré à l'origine. On a: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $t(h, k) : (x, y) \mapsto (x_1, y_1) = (x + h, y + k)$ Alors: $x = x_1 - h$ et $y = y_1 - k$ Puisque $x^2 + y^2 = r^2$ par substitution $(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 = r^2$ $t_{(h,k)}(C) = \{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 = r^2\}$ Comme x_1 et y_1 sont des variables, on les remplace par x et y. Donc $\boxed{t_{(h,k)}(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}}$  Équation générale du cercle Transformer l'équation canonique en équation équivalente: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ $x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$ $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$ On sait que h, k et r sont des nombres réels. Substituer dans cette équation $2h$ par D, $2k$ par E et $h^2 + k^2 - r^2$ par F. On obtient la forme générale du cercle. $\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.7 Étant donné un cercle, une ellipse ou une hyperbole centrés à l'origine, TROUVER l'équation canonique ou générale de son image par une translation. (suite)	Remarque: Dans certains manuels, on rencontre la forme générale $x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ pour représenter le cercle. On peut facilement comprendre pourquoi ces auteurs ont choisi cette forme. - ELLIPSE Les notions concernant l'ellipse centrée à l'origine se trouvent à l'objectif 3.3.10, option I, aux pages 281 à 285. Revenir sur les définitions suivantes: 1. Ellipse: L'ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes appelés foyers est constante. 2. Centre de l'ellipse: Le point milieu du segment joignant les foyers. 3. Axe transversal: La droite passant par les deux foyers. 4. Grand axe: La corde déterminée par l'axe transversal et l'ellipse. 5. Axe conjugué: La droite perpendiculaire à l'axe transversal et passant par le centre de l'ellipse. 6. Petit axe: La corde déterminée par l'axe conjugué et l'ellipse. 7. |a|: La demi-longueur du grand axe. 8. |b|: La demi-longueur du petit axe. 9. |c|: La distance du foyer au centre. 10. |2a|: La longueur du grand axe ou la somme des distances $d(F_1, P) + d(F_2, P)$. Les équations canoniques de l'ellipse centrée à l'origine sont connues des élèves: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, si l'axe transversal est horizontal; ou $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$, si l'axe transversal est vertical. Pour les élèves de l'option II, nous apportons un changement dans les définitions de certains termes dans le but de travailler avec une seule équation canonique pour l'ellipse et l'hyperbole. Définitions inchangées: ellipse, centre de l'ellipse, axe transversal, grand axe, axe conjugué, petit axe, |c|.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.7 Étant donné un cercle, une ellipse ou une hyperbole centrés à l'origine, TROUVER l'équation canonique ou générale de son image par une translation. (suite)	Définitions à changer: |a|: la demi-longueur du segment de l'axe horizontal |2a|: la longueur du segment de l'axe horizontal |b|: la demi-longueur du segment de l'axe vertical |2b|: la longueur du segment de l'axe vertical.  Équation canonique de l'ellipse de centre (h, k). En procédant de la même façon que pour le cercle, on peut démontrer que par une translation t (h, k) de l'ellipse centrée à l'origine ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$), on obtient l'équation canonique de l'ellipse: $$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$ Équation générale de l'ellipse de centre (h, k). Transformer cette équation canonique en équations équivalentes: $$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ $$\frac{x^2 - 2hx + h^2}{a^2} + \frac{y^2 - 2ky + k^2}{b^2} = 1$$ $$b^2x^2 - 2hb^2x + b^2h^2 + a^2y^2 - 2ka^2y + a^2k^2 = a^2b^2$$ Transposer: $$(b^2)x^2 + (a^2)y^2 + (-2hb^2)x + (-2ka^2)y + (b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2) = 0$$ Ce qui est de la forme: $$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Objectifs intermédiaires

1.1.7

Étant donné un cercle, une ellipse ou une hyperbole centrés à l'origine, TROUVER l'équation canonique ou générale de son image par une translation. (suite)

Commentaires

La même remarque que pour le cercle peut s'appliquer ici. Certains auteurs définissant la forme générale de l'ellipse comme étant:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

- HYPERBOLE

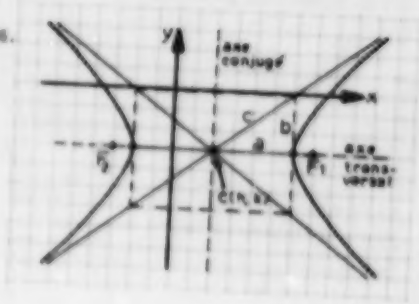
Les notions concernant l'hyperbole centrée à l'origine se trouvent à l'objectif 3.3.10, option I, aux pages 281 à 286. Les définitions de l'hyperbole, des foyers, du centre, de l'axe transversal, de l'axe conjugué et de |c| demeurent les mêmes que dans le document de l'option I.

Il faut changer les définitions de:

|a|: la demi-longueur de l'axe horizontal, si l'hyperbole traverse l'axe des "x";

|b|: la demi-longueur de l'axe vertical, si l'hyperbole traverse l'axe des "y";

afin d'avoir une seule forme canonique.

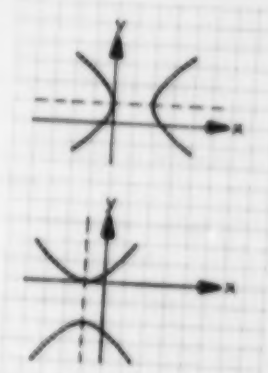


Équation canonique de l'hyperbole de centre (h, k).

Même démarche que celles du cercle et de l'ellipse.

On obtient l'équation canonique de l'hyperbole:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = \pm 1}$$



Équation générale de l'hyperbole de centre (h, k).

Toujours en procédant comme pour l'ellipse, on obtient:

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.8 REPRÉSENTER dans le plan la région déterminée par une relation définissant une parabole, un cercle, une ellipse, une hyperbole ou la région du plan associée à l'un de ces lieux géométriques.	- Les notions concernant les régions déterminées par les relations définissant ces coniques ou les régions du plan associées à l'un de ces lieux se trouvent dans le guide 16-5303-01 aux pages suivantes: cercle: pages 278-279, ellipse: page 286, hyperbole: page 289. - La représentation dans le plan d'une région déterminée par une relation définissant une conique ou une région du plan associée à une conique quelconque demande de la part de l'élève plusieurs préalables et une méthode de travail efficace pour ne pas perdre de temps. À partir de la relation donnée, l'élève est invité à déterminer la conique associée. Si la relation est donnée sous la forme générale, il se fait une idée de la conique en examinant les paramètres A et C de $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. À part des cas dégénérés, si A = C on aura un cercle, si A · C > 0 on aura une parabole, si A · C < 0 on aura une ellipse, si A · C < 0 on aura une hyperbole. Ensuite, il faut faire subir les transformations algébriques nécessaires pour obtenir une forme canonique de la relation qui permettra de trouver des points critiques (centre, sommets, foyers, latera-recta, ceux qui coupent les axes du système cartésien, s'il y a lieu) et les axes de symétrie (transversal, conjugué), etc. La première identification pourrait se faire assez rapidement, si l'élève utilise un tableau semblable à celui de la page suivante.

Objectifs intermédiaires

1.1.8

REPRÉSENTER dans le plan la région déterminée par une relation définissant une parabole, un cercle, une ellipse, une hyperbole ou la région du plan associée à l'un de ces lieux géométriques. (suite)

Commentaires

CERCLE	PARABOLE	ELLIPSE	HYPERBOLE
$x^2 + y^2 = r^2$	$x^2 = 4ay \; ; \; y^2 = 4ax$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	$(x - h)^2 = 4a(y - k)$ ou $(y - k)^2 = 4a(x - h)$	$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = \pm 1$
$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$	$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$; $y = ax^2 + bx + c$; $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$; $x = ay^2 + by + c$	$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	
		N.B.: A, C, a, b et r sont des nombres réels non nuls.	

Méthode des "points critiques" et axe(s) de symétrie(s).

Que doit-on connaître pour construire les différentes coniques?

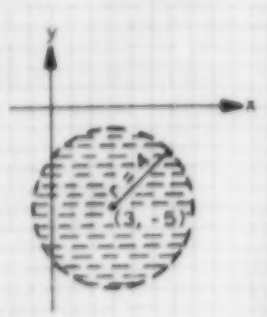
CERCLE : le centre et le rayon;

PARABOLE : le sommet, le foyer, l'axe de symétrie, la directrice, les points où elle coupe les axes cartésiens (s'il y a lieu), les translations;

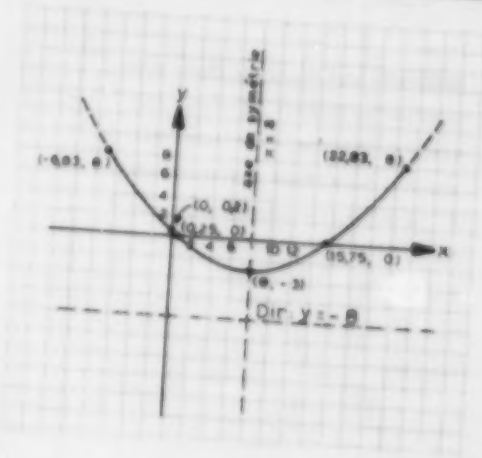
ELLIPSE : le centre, les sommets, les foyers, les longueurs des axes (transversal et conjugué) et s'ils existent, les points qui coupent les axes cartésiens;

HYPERBOLE: le centre, les sommets, les foyers, les longueurs des axes (transversal et conjugué), les asymptotes et les points qui coupent les axes cartésiens (s'ils existent).

N.B.: Tous ces points ou axes ne sont pas nécessaires mais, selon la donnée, ils peuvent être très utiles. Maintenant, on examine quelques situations.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.8 REPRÉSENTER dans le plan la région déterminée par une relation définissant une parabole, un cercle, une ellipse, une hyperbole ou la région du plan associée à l'un de ces lieux géométriques. (suite)	1. Représenter dans le plan la relation définie par $((x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0)$. • On transforme $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0$ sous sa forme canonique: $x^2 - 6x + y^2 + 10y = -18$ $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 = -18 + 9 + 25$ $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 16$ L'équation $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 16$ représente un cercle (obj. 1.1.6 de ce cours). • Tracer ce cercle: Selon la forme $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, on peut dire que: - le centre du cercle $(h, k) = (3, -5)$, - le rayon $(r^2 = 16)$ mesure 4 unités. On peut donc tracer le cercle. • La relation définie par $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 < 16$ représente l'intérieur du cercle (non la circonférence), selon l'objectif 3.3.7 de l'option I. • Le dessin à droite représente donc la région du plan déterminée par la relation $((x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 < 0)$.  2. Tracer la conique associée au lieu $((x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 16x - 20y + 4 = 0)$: • On transforme l'équation donnée sous sa forme canonique $x^2 - 16x = 20y - 4$ $x^2 - 16x + 64 = 20y - 4 + 64$ $(x - 8)^2 = 20(y + 3)$ est de la forme $(x - h)^2 = 4 \cdot a(y - k)$. C'est une parabole (selon l'objectif 1.1.4 de ce cours).

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.8 REPRÉSENTER dans le plan la région déterminée par une relation définissant une parabole, un cercle, une ellipse, une hyperbole ou la région du plan associée à l'un de ces lieux géométriques. (suite)	• Tracer cette parabole : Selon $(x - h)^2 = 4a(y - k)$, le sommet est $(h, k) \therefore (8, -3)$; l'équation de l'axe de symétrie est $x = h \therefore x = 8$; l'équation de la directrice est $y = k - a \therefore y = -3 - 5 = -8$. Déterminer les points critiques: si $y = 0$, $(x - 8)^2 = 60 \therefore x' = 15,746$ $x'' = 0,254$ $(15,746, 0)$ et $(0,254, 0)$ si $x = 0$, $(0 - 8)^2 = 20(y + 3) \therefore y = 0,2$ $(0, 0,2)$ si $y = 8$, $(x - 8)^2 = 20(8 + 3) \therefore x' = 22,83$ $x'' = -6,83$ $(22,83, 8)$ et $(-6,83, 8)$ La courbe de droite représente donc le lieu défini par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 16x - 20y + 4 = 0\}$.

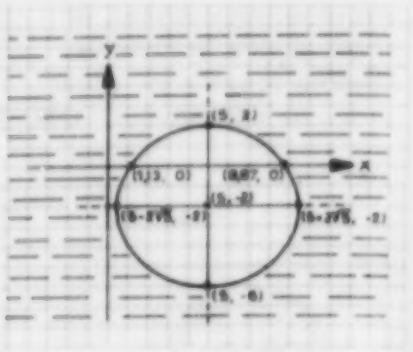


3. Quelle est la région déterminée par la relation $\{ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16x^2 - 160x + 20y^2 + 80y + 160 = 0\}$?

• On transforme $16x^2 - 160x + 20y^2 + 80y + 160 = 0$ sous sa forme canonique, pour obtenir:

$$\frac{(x - 5)^2}{20} + \frac{(y + 2)^2}{16} = 1$$

On sait que l'équation qui a cette forme est une ellipse dont l'axe transversal est parallèle à l'axe des "x" (obj. 1.1.7 de ce cours).

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.8 **REPRÉSENTER** dans le plan la région déterminée par une relation définissant une parabole, un cercle, une ellipse, une hyperbole ou la région du plan associée à l'un de ces lieux géométriques. (suite)	- Tracer l'ellipse qui correspond à cette équation: $\frac{(x-5)^2}{20} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$: - le centre $(h, k) = (5, -2)$; - longueur du: grand axe $\lvert 2a\rvert = 2 \cdot 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ petit axe $\lvert 2b\rvert = 2 \cdot 4 = 8$; - les sommets des deux axes: trans.: $(h-a, k) = (5-2\sqrt{5}, -2)$ $(h+a, k) = (5+2\sqrt{5}, -2)$ conj.: $(h, k-b) = (5, -6)$ $(h, k+b) = (5, 2)$ - points dont $y = 0$; $\frac{(x-5)^2}{20} + \frac{4}{16} = 1$; $x' = 8{,}87$ $x'' = 1{,}13$ $(8{,}87, 0)$ et $(1{,}13, 0)$  La région qui correspond à $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16x^2 - 160x + 20y^2 + 80y + 160 = 0\}$ est l'ensemble des points du plan qui appartiennent à la courbe et tous ceux qui se situent à l'extérieur de l'ellipse (obj. 3.3.13, option I). - Les exemples donnés aux pages précédentes pourraient être simplifiés si on donnait la forme canonique au lieu de la forme générale. À vous d'en décider selon le temps que vous avez pour couvrir cet objectif. - Voici un tableau aide-mémoire qui aidera les élèves à tracer les différentes coniques plus rapidement et aussi à les identifier. Vous pouvez demander aux élèves de le remplir comme enrichissement ou le leur donner rempli. Il servira aussi à trouver les centres, les foyers, les sommets, les directrices, les axes transverses et conjugués et les asymptotes des coniques concernées.

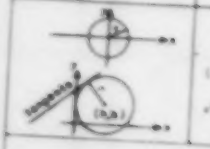
PARABOLE

CONIQUE	ÉQUATIONS	CENTRE	FOYERS	SOMMETS	DIRECTRICES	AXE DE SYMÉTRIE		
	$4ay = x^2$ $4ax = y^2$ $4a(y-\beta) = (x-\alpha)^2$ $4a(x-\alpha) = (y-\beta)^2$ $y = ax^2 + bx + c$ $x = ay^2 + by + c$ $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$		$(0, a)$ $(a, 0)$ $(\alpha, \beta + a)$ $(\alpha + a, \beta)$ $\left(\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta - 1}{4a}\right)$ $\left(-\frac{E^2-4CF}{4C}, -\frac{E}{2C}\right)$	$(0, 0)$ $(0, 0)$ (α, β) (α, β) $\left(\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ $\left(\frac{A}{4C}, -\frac{E}{2C}\right)$	$y = -a$ $x = -a$ $x = \alpha$ $y = \beta$ $y = -\frac{\Delta + 1}{4a}$ $x = -\frac{\Delta}{4a}$	$x = 0$ $y = 0$ $x = \alpha$ $y = \beta$ $x = \frac{b}{2a}$ $y = \frac{b}{2a}$ $x = -\frac{E}{2C}$ $y = -\frac{E}{2C}$		

Directrice — axe de symétrie — foyer $F(\alpha, \beta)$

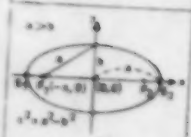
Transformer les équations sous leur forme canonique

CERCLE

CONIQUE	ÉQUATIONS	CENTRE	RAYON	ÉQUATION DE LA TANGENTE		
	$x^2 + y^2 = r^2$ $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$	$(0, 0)$ (α, β) $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$	r r $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$	$y - y_1 = -\left(\frac{x_1 - \alpha}{y_1 - \beta}\right)(x - x_1)$		

Tangente — (α, β)

ELLIPSE

CONIQUE	ÉQUATIONS	CENTRE	FOYERS	SOMMETS	DIRECTRICES	AXE DE SYMÉTRIE	AXE CONJUGUÉ	ASYMPTOTES
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(0, 0)$	$(-c, 0)$ $(c, 0)$	$(-a, 0)$ $(a, 0)$	$x = -\frac{a}{\varepsilon}$ $x = \frac{a}{\varepsilon}$	$y = 0$ $L = 2b$	$x = 0$ $L = 2b$	
	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$	(α, β)	$(\alpha - c, \beta)$ $(\alpha + c, \beta)$	$(\alpha - a, \beta)$ $(\alpha + a, \beta)$	$x = \alpha - \frac{a}{\varepsilon}$ $x = \alpha + \frac{a}{\varepsilon}$	$y = \beta$ $L = 2b$	$x = \alpha$ $L = 2b$	
	$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	$\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$	Transformer sous forme canonique					

HYPERBOLE

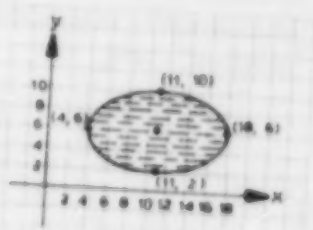
CONIQUE	ÉQUATIONS	CENTRE	FOYERS	SOMMETS	DIRECTRICES	AXE DE SYMÉTRIE	AXE CONJUGUÉ	ASYMPTOTES
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(0, 0)$	$(-c, 0)$ $(c, 0)$	$(-a, 0)$ $(a, 0)$	$x = -\frac{a}{\varepsilon}$ $x = \frac{a}{\varepsilon}$	$y = 0$ $L = 2b$	$x = 0$ $L = 2b$	$y = \pm\frac{b}{a}x$
	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$	(α, β)	$(\alpha - c, \beta)$ $(\alpha + c, \beta)$	$(\alpha - a, \beta)$ $(\alpha + a, \beta)$	$x = \alpha - \frac{a}{\varepsilon}$ $x = \alpha + \frac{a}{\varepsilon}$	$y = \beta$ $L = 2b$	$x = \alpha$ $L = 2b$	$y - \beta = \pm\frac{b}{a}(x - \alpha)$
	$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	$\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$	Transformer sous forme canonique					

DROITE

CONIQUE	ÉQUATIONS	PENTE	COORDONNÉES À L'ORIGINE ABSCISSE	COORDONNÉES À L'ORIGINE ORDONNÉE	FORME GÉNÉRALE : $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	$-\frac{b}{a}$	a	b	
	$y = mx + b$	m	$-\frac{b}{m}$	b	
①	$0y + x = b$	n.n.	$-\frac{b}{0}$	n.n.	
②	$y + 0x = b$	0	n.n.	b	
	$Dx + Ey + F = 0$	$-\frac{D}{E}$	$-\frac{F}{D}$	$-\frac{F}{E}$	

n.n. : non existant.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.9 Étant donné une parabole, un cercle, une ellipse, une hyperbole ou la région du plan associée à l'un de ces lieux géométriques, TROUVER la relation associée à ce lieu.	- Cet objectif étant "le vice versa" du précédent, le tableau-synthèse peut être d'une très grande utilité. Il servira à identifier la forme canonique qui correspond à la conique donnée et, selon la région du plan associée à cette conique, il faut y placer le bon symbole (parmi les suivants: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $=$). L'objectif terminal 3.3 de l'option I (3.3.1, 3.3.2, 3.3.4, 3.3.6, 3.3.8, 3.3.10, 3.3.12, 3.3.14) doit être maîtrisé par les élèves si on veut réaliser celui-ci. Il faut insister sur le fait que les objectifs intermédiaires 3.3.8 et 3.3.14 de l'option I (pages 279 et 290) doivent se voir ici avant de poursuivre. On doit élargir les définitions données à l'objectif 3.3 de l'option I aux coniques non centrées à l'origine. Ce qui donne comme résultat: $\forall a, b, h, k \in \mathbb{R}$. $I_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - h)^2 < 4a(y - k) \vee (y - k)^2 < 4a(x - h)\}$ $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - h)^2 = 4a(y - k) \vee (y - k)^2 = 4a(x - h)\}$ $E_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - h)^2 > 4a(y - k) \vee (y - k)^2 > 4a(x - h)\}$ $I_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - h)^2 + (y - k)^2 < r^2 \text{ où } r \in \mathbb{R}_+^*\}$ $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \text{ où } r \in \mathbb{R}_+^*\}$ $E_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - h)^2 + (y - k)^2 > r^2 \text{ où } r \in \mathbb{R}_+^*\}$ $I_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} < 1 \text{ où } a \text{ et } b \in \mathbb{R}_+^*\}$ $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \text{ où } a \text{ et } b \in \mathbb{R}_+^*\}$ $E_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} > 1 \text{ où } a \text{ et } b \in \mathbb{R}_+^*\}$ $I_H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < \frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} < 1 \text{ où } a \text{ et } b \in \mathbb{R}_+^*\}$ $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = \pm 1 \text{ où } a \text{ et } b \in \mathbb{R}_+^*\}$ $E_H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} > 1 \text{ ou } \frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} < -1 \text{ où } a \text{ et } b \in \mathbb{R}_+^*\}$ À l'aide du tableau-synthèse et de ces définitions, trouver la relation associée à un lieu donné se résume à choisir parmi ces éléments ceux qui conviennent à la situation.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.9 Etant donné une parabole, un cercle, une ellipse, une hyperbole ou la région du plan associée à l'un de ces lieux géométriques, TROUVER la relation associée à ce lieu. (suite)	Exemple: Trouver la relation associée au lieu représenté par ce graphique. Le graphique représente une ellipse et son intérieur. La relation aura donc la forme: $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1\}$ et $i_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} < 1\}$ On trouve les valeurs de h, k, a et b. Selon le graphique, $2a = 18 - 4 = 14$; $a = 7$ $2b = 10 - 2 = 8$; $b = 4$ $(h, k) = (11, 6)$ Donc la relation qui représente cette situation est: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x-11)^2}{7^2} + \frac{(y-6)^2}{4^2} = 1\}$ 
1.1.10 TROUVER le domaine et l'image d'une relation définissant une parabole, un cercle, une ellipse, une hyperbole ou la région du plan associée à l'un de ces lieux géométriques.	- Ceci n'est qu'un exemple; il faut apprendre aux élèves à trouver des relations en leur donnant plusieurs situations de ce genre. - Les objectifs 3.3.5, 3.3.9 et 3.3.15 de l'option I, aux pages 277-279-281, définissent les ensembles de nombres concernant le domaine et l'image d'une relation qui représente soit une parabole, un cercle, une ellipse, une hyperbole (tous centrés à l'origine) ou une région du plan associée à l'un de ces lieux. Il faut généraliser ces définitions aux coniques non centrées à l'origine. Les élèves devront arriver aux conclusions suivantes:

Objectifs intermédiaires

1.1.10

TROUVER le domaine et l'image d'une relation définissant une parabole, un cercle, une ellipse, une hyperbole ou la région du plan associée à l'un de ces lieux géométriques. (suite)

Commentaires

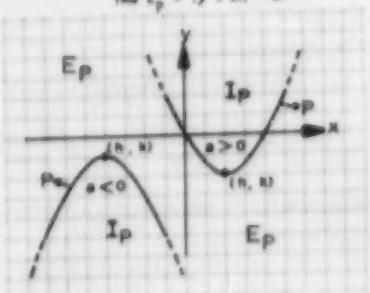
Parabole de la forme:

$(x - h)^2 \gtrless 4a(y - k)$

dom $I_p = \mathbb{R}$; ima $I_p = (y \in \mathbb{R} | y - k > 0$ si $a > 0)$
ima $I_p = (y \in \mathbb{R} | y - k < 0$ si $a < 0)$

dom $P = \mathbb{R}$; ima $P = (y \in \mathbb{R} | y - k \geq 0$ si $a > 0)$
ima $P = (y \in \mathbb{R} | y - k \leq 0$ si $a < 0)$

dom $E_p = \mathbb{R}$; ima $E_p = (y \in \mathbb{R}) = \mathbb{R}$
ima $E_p = (y \in \mathbb{R}) = \mathbb{R}$

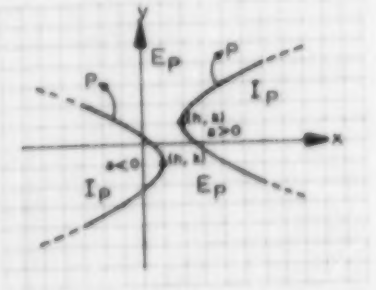


$(y - k)^2 \gtrless 4a(x - h)$

dom $I_p = (x \in \mathbb{R} | x - h > 0$ si $a > 0)$; ima $I_p = \mathbb{R}$
$= (x \in \mathbb{R} | x - h < 0$ si $a < 0)$

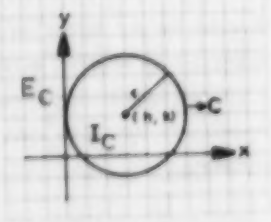
dom $P = (x \in \mathbb{R} | x - h \geq 0$ si $a > 0)$; ima $P = \mathbb{R}$
$= (x \in \mathbb{R} | x - h \leq 0$ si $a < 0)$

dom $E_p = (x \in \mathbb{R}) = \mathbb{R}$; ima $E_p = \mathbb{R}$
$= (x \in \mathbb{R}) = \mathbb{R}$



Cercle: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

dom $I_C = (x \in \mathbb{R} | |x - h| < r)$; ima $I_C = (y \in \mathbb{R} | |y - k| < r)$
dom $C = (x \in \mathbb{R} | |x - h| \leq r)$; ima $C = (y \in \mathbb{R} | |y - k| \leq r)$
dom $E_C = (x \in \mathbb{R}) = \mathbb{R}$; ima $E_C = (y \in \mathbb{R}) = \mathbb{R}$



Objectifs intermédiaires

1.1.10

TROUVER le domaine et l'image d'une relation définissant une parabole, un cercle, une ellipse, une hyperbole ou la région du plan associée à l'un de ces lieux géométriques. (suite)

Commentaires

Ellipse

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$\text{dom } I_E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-h| < a\}$; $\text{ima } I_E = \{y \in \mathbb{R} \mid |y-k| < b\}$

$\text{dom } E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-h| \leq a\}$; $\text{ima } E = \{y \in \mathbb{R} \mid |y-k| \leq b\}$

$\text{dom } E_E = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$; $\text{ima } E_E = \{y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

Hyperbole

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = \pm 1$$

si $a > b$

$\text{dom } I_H = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$; $\text{ima } I_H = \{y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$\text{dom } H = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-h| \geq a\}$; $\text{ima } H = \{y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

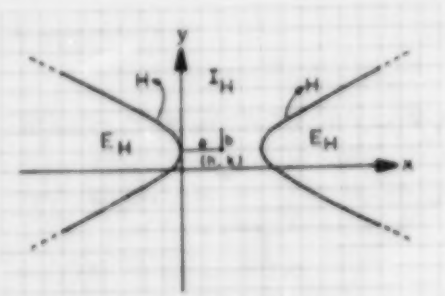
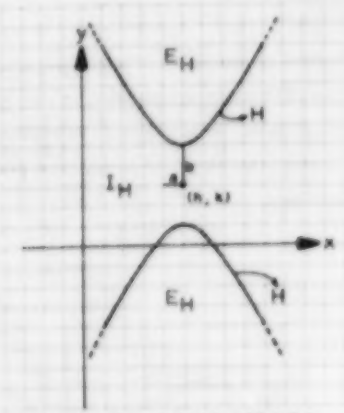
$\text{dom } E_H = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-h| \geq a\}$; $\text{ima } E_H = \{y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

si $b > a$

$\text{dom } I_H = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$; $\text{ima } I_H = \{y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$\text{dom } H = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$; $\text{ima } H = \{y \in \mathbb{R} \mid |y-k| \geq b\}$

$\text{dom } E_H = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$; $\text{ima } E_H = \{y \in \mathbb{R} \mid |y-k| \geq b\}$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.10 TROUVER le domaine et l'image d'une relation définissant une parabole, un cercle, une ellipse, une hyperbole ou la région du plan associée à l'un de ces lieux géométriques. (suite)	 
1.1.11 Un cercle et les coordonnées du point de tangence étant donnés, TROUVER l'équation de la tangente.	- La notion de tangente se trouve à l'objectif 2.5.1 du cours de base (niveau V) et à l'objectif 3.3.1 de ce cours. Si les élèves ne possèdent pas cette notion, vous devez, avant de voir cet objectif, la leur faire découvrir ou en donner la définition ainsi que la propriété qui en découle (la perpendicularité). - Connaissant les préalables nécessaires, les élèves peuvent maintenant trouver l'équation de la tangente selon les conditions données. Voici une démarche (à l'aide d'un exemple) que certains élèves pourraient vous présenter. Exemple: Quelle est l'équation de la tangente au cercle $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ qui passe par le point de tangence (5, 7)?

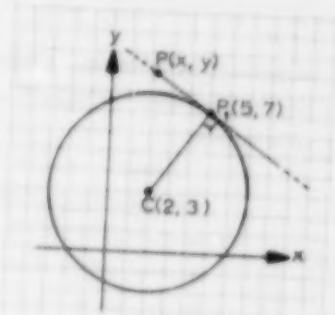
Objectifs intermédiaires

1.1.11

Un cercle et les coordonnées du point de tangence étant donnés, TROUVER l'équation de la tangente. (suite)

Commentaires

1. Pour trouver l'équation d'une droite, il faut connaître deux points ou un point et la pente de la droite.
   a) On connaît un point: point de tangence (5, 7).
   b) Il est possible de trouver la pente de la droite tangente au cercle, puisqu'elle est perpendiculaire à la droite qui passe par P_1C (propriété de la tangente au cercle).



2. Connaissant P_1, on trouve les coordonnées de C. En examinant l'équation du cercle $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$, on peut affirmer que les coordonnées de C sont (2, 3).
   Maintenant on peut trouver la pente de la droite qui passe par P_1C, en appliquant la notion de pente:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{7 - 3}{5 - 2} = \frac{4}{3}$$

   La pente de la droite qui passe par P_1C est $m = \frac{4}{3}$.

3. Revenir à 1. b):
   On peut affirmer que la pente de la tangente au cercle est: $m = m_1 = -1$ (à cause de la perpendicularité).

$$m = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

4. Connaissant un point et la pente de la tangente, on peut maintenant trouver son équation:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \; ; \; \frac{y - 7}{x - 5} = -\frac{3}{4}$$

   L'équation de la tangente est donc: $\boxed{y - 7 = -\frac{3}{4}(x - 5)}$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.11 Un cercle et les coordonnées du point de tangence étant donnés, TROUVER l'équation de la tangente.	En suivant cette démarche, on peut généraliser. Ainsi, on obtient comme résultat l'équation de la tangente qui passe à un point de tangence $P_1(x_1, y_1)$, à un cercle donné $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ est $$y - y_1 = -\left(\frac{x_1 - h}{y_1 - k}\right)(x - x_1)$$

OBJECTIF TERMINAL N°: 1.2 RÉSOUDRE des problèmes utilisant des relations du premier ou du second degré

Cet objectif terminal est une généralisation des objectifs concernant la droite (1er degré) et les coniques (2e degré). Après avoir défini les lieux géométriques de la droite (objectif terminal 3.2 de l'option I), de la parabole dans le sommet se situe à l'origine, du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole centrés à l'origine (objectif terminal 3.2 de l'option I) et de ces mêmes coniques non centrées à l'origine (objectif terminal 1.1 de l'option II), après avoir représenté dans un système cartésien ces différents lieux connaissant les caractéristiques de ces lieux géométriques, leurs domaines et leurs images, on peut [illegible] vont demander aux élèves de déterminer des sections coniques, de trouver des équations, de représenter dans le plan cartésien des relations données et de trouver les domaines et les images de ces dernières.

Les activités présentées pour chacun des objectifs intermédiaires de cette section tiennent compte des objectifs des cours 534 et 531. Au risque de nous répéter, rappelons que l'informatique peut rendre ici plusieurs services.

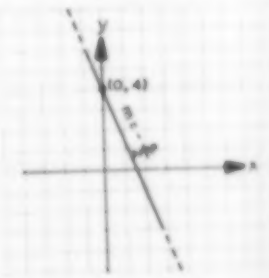
OBJECTIF TERMINAL Nº: 1.2 RÉSOUDRE DES PROBLÈMES UTILISANT DES RELATIONS DU PREMIER OU DU SECOND DEGRÉ.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.2.1 La définition d'un lieu géométrique étant donnée, DÉTERMINER la section conique qui lui est associée et vice versa.	1 - La définition d'un lieu peut être donnée à l'aide de la forme canonique ou générale. Lorsque la forme canonique est donnée, déterminer la section conique (à l'aide du tableau-synthèse) se fait directement. Exemple: Déterminer la section conique associée au lieu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 3)^2 = 12(y + 2)\}$. Solution plausible: Sachant que l'équation $(x - h)^2 = 4a(y - k)$ représente une parabole dont l'axe de symétrie est vertical, on peut immédiatement dire que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 3)^2 = 12(y + 2)\}$ détermine une parabole dont l'axe de symétrie est vertical, puisque l'équation est de la même forme. Lorsque le lieu donné a la forme générale, à cause des diverses possibilités (ellipse, hyperbole, etc.), il est préférable de transformer la relation sous sa forme canonique avant de déterminer la conique. Exemple 1: Quel nom porte la conique associée à $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0\}$? A. On transforme l'équation $x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$ $x^2 + 2x + \square + 4y^2 - 8y + \square = -1$ $x^2 + 2x + 1 + 4y^2 - 8y + 4 = -1 + 1 + 4$ $(x + 1)^2 + 4(y - 1)^2 = 4$ $\frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(y - 1)^2}{1} = 1$ B. Sachant que $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ représente une ellipse, on peut affirmer que $\frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(y - 1)^2}{1} = 1$ représente une ellipse de centre $(-1, 1)$ dont l'axe transversal est horizontal. On sait aussi que $|a| = 2$ et que $|b| = 1$.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.2.1 La définition d'un lieu géométrique étant donnée, DÉTERMINER la section conique qui lui est associée et vice versa. (suite)	Exemple 2: Quelle est la section conique associée à $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 64x^2 - 25y^2 - 384x - 300y - 1924 = 0\}$? A. On transforme l'équation: $64x^2 - 25y^2 - 384x - 300y - 1924 = 0$ $64x^2 - 384x + \square - 25y^2 - 300y + \square = 1924$ $(64x^2 - 384x + 576) - (25y^2 + 300y + 900) = 1924 + 576 - 900$ $64(x - 3)^2 - 25(y + 6)^2 = 1600$ $\frac{(x - 3)^2}{25} - \frac{(y + 6)^2}{64} = 1$ B. Sachant que $\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y + k)^2}{b^2} = 1$ représente une hyperbole, on peut affirmer que $\frac{(x - 3)^2}{5^2} - \frac{(y + 6)^2}{8^2} = 1$ représente une hyperbole de centre (3, -6) dont l'axe transversal est vertical, puisque (b) > (a). N.B.: On pourrait ajouter d'autres renseignements concernant les coniques à l'aide du tableau-synthèse, mais l'objectif ne les demande pas. II - Lorsque la section conique est donnée, définir le lieu géométrique de celle-ci devient une application directe de la définition d'un lieu. Exemple 1: Quelle est la définition du lieu qui est représenté par la parabole d'équation: $y^2 = 8(x - 3)$? On peut immédiatement dire que le lieu géométrique qui détermine cette parabole est: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 8(x - 3)\}$. Mais si la section conique est donnée sous une forme et qu'on veut que le lieu soit défini sous une autre forme, il faut à ce moment transformer la forme donnée. Exemple 2: Définir le lieu géométrique sous forme générale de l'ellipse d'équation $\frac{(x - 2)^2}{4^2} + \frac{(y + 3)^2}{3^2} = 1$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.2.1 La définition d'un lieu géométrique étant donnée, DÉTERMINER la section conique qui lui est associée et vice versa. (suite)	A. On transforme l'équation sous sa forme générale: $\frac{(x-2)^2}{4^2} + \frac{(y+3)^2}{3^2} = 1$ $\frac{x^2-4x+4}{16} + \frac{y^2+6y+9}{9} = 1$ $9x^2 - 36x + 36 + 16y^2 + 96y + 144 = 144$ $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$ B. Le lieu est donc: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0\}$. - Cet objectif comprend aussi les relations du 1er degré. Même si les exemples donnés n'en contiennent pas, il faut en donner aux élèves.
1.2.2 Les caractéristiques d'un lieu géométrique étant données, TROUVER l'équation associée à ce lieu.	- Les élèves connaissent les caractéristiques qui définissent un lieu géométrique associé à une droite (objectif terminal 3.2, option I). En voici quelques-unes: 1. Deux points quelconques (objectif 3.2.5), 2. Un point et la pente (objectif 3.2.5), 3. Les coordonnées à l'origine (objectif 3.2.10), 4. Un point et une droite parallèle ou perpendiculaire (objectif 3.2.9), etc. - Ils connaissent aussi les caractéristiques qui définissent les coniques centrées à l'origine ou non (objectifs 3.3, option I et 1.1, option II). En voici quelques-unes: Cercle: 1. Le centre et le rayon (objectif 1.1.5), 2. Le centre et un point de la circonférence (déf. du cercle), 3. Le centre et l'équation de la tangente au cercle (objectif 1.1.11), 4. Les points extrémités du diamètre (objectif 1.1.5), etc.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.2.2 Les caractéristiques d'un lieu géométrique étant données, TROUVER l'équation associée à ce lieu. (suite)	**Parabole:** 1. Le sommet et le foyer (objectif 1.1.4), 2. Le sommet et l'équation de la directrice (objectif 1.1.6), 3. Le sommet et un point quelconque de la parabole (déf. de la parabole), 4. Le foyer et l'équation de la directrice (objectif 1.1.6), 5. Le foyer et distance du sommet au foyer (déf. de la parabole), etc. **Ellipse et hyperbole:** 1. Les foyers et les sommets (objectif 3.3.10), 2. Le centre, un foyer et un sommet, 3. Le centre, les longueurs des deux axes, 4. Le centre, un sommet sur l'axe transversal et un sommet sur l'axe conjugué, 5. Les équations des axes de symétrie et un point sommet pour chacun des axes, 6. Pour l'hyperbole: les équations des asymptotes, etc. Voici quelques exemples. **Exemple 1**: (Droite) Quelle est l'équation associée à la droite de pente $\frac{-5}{2}$ et qui coupe l'axe des y au point (0, 4)? Connaissant la pente et l'ordonnée à l'origine, on peut se servir de l'équation $y = mx + b$ en substituant à m et à b les valeurs données. On obtient: $y = \frac{-5}{2}x + 4$, ce qui répond à la question posée. Si on veut l'équation sous sa forme générale, il faut la transformer pour finalement obtenir: $\boxed{5x + 2y - 8 = 0}$



Objectifs intermédiaires

3.2.2

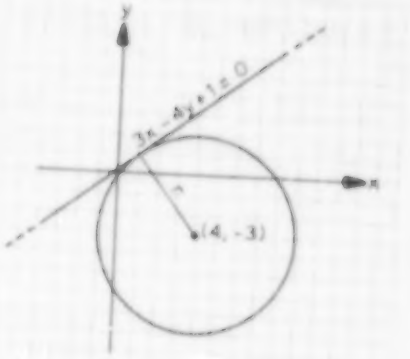
Les caractéristiques d'un lieu géométrique étant données, TROUVER l'équation associée à ce lieu: (suite)

Commentaires

Exemple 2: Trouver l'équation qui représente le cercle lorsque le centre se situe à (4, -3) et que l'équation d'une tangente au cercle est: $3x - 4y + 1 = 0$.

- Le centre du cercle étant donné, on peut écrire: $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = r^2$.

- Pour trouver la valeur de r, on connaît un point (4, -3) et l'équation de la tangente au cercle ($3x - 4y + 1 = 0$), on peut alors trouver la distance entre ce point et la droite (objectif 3.2.12, option 1).



$$r = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{où } x_1 \text{ y est le point } (4, -3)$$

$$r = \frac{|3(4) - 4(-3) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

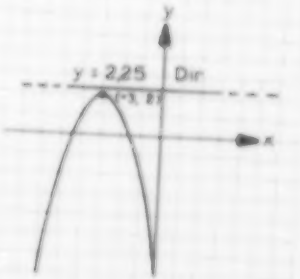
$$r = 5$$

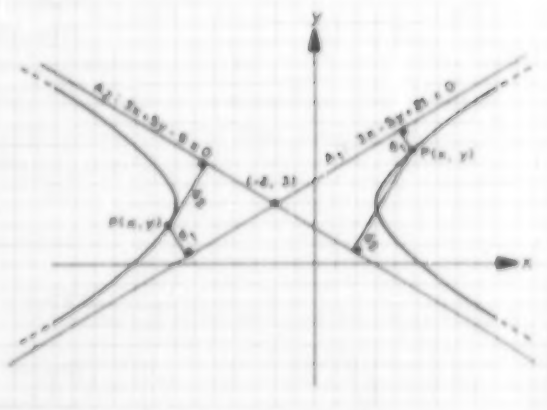
L'équation demandée est donc: $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

Exemple 3: Par quelle équation la parabole qui a comme sommet (-3, 2) et comme directrice l'équation $y = 2,25$ est-elle identifiée?

- Le sommet et la directrice étant donnés, on peut dire que l'équation de la parabole aura la forme: $(x + 3)^2 = 4a(y - 2)$.

- Sachant que l'équation de la directrice a la forme $y = k - a$ et que $y = 2,25$, calculer la valeur de a en substituant les valeurs connues dans cette équation:



Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.2.2 Les caractéristiques d'un lieu géométrique étant données, TROUVER l'équation associée à ce lieu. (suite)	$y = k - a$ $2,25 = 2 - a$ $0,25 = -a$ ou $a = -0,25$ • On peut donc conclure que l'équation demandée est: $(x + 3)^2 = -(y - 2)$. Exemple 4: Quelle est l'équation du lieu d'un point qui se déplace de façon à ce que le produit de ses distances aux asymptotes $\frac{x-3}{x+2} = \pm\frac{3}{5}$ soit $\frac{225}{34}$? • La première étape consiste à transformer les équations des asymptotes sous la forme: $Ax + By + C = 0$. As_1: $\frac{x-3}{x+2} = \frac{3}{5}$ As_1: $3x - 5y + 21 = 0$ As_2: $\frac{x-3}{x+2} = -\frac{3}{5}$ As_2: $3x + 5y - 9 = 0$ • Sachant que le produit des distances (d_1 et d_2) est $\frac{225}{34}$, on peut affirmer que $d_1 \cdot d_2 = \frac{225}{34}$.  $PAs_1 \cdot PAs_2$ (Appliquer la notion de distance d'un point à une droite) $\frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{225}{34}$ $\frac{|3x - 5y + 21|}{\sqrt{3^2 + 5^2}} \cdot \frac{|3x + 5y - 9|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}} = \frac{225}{34}$ Après quelques transformations, on obtient: $\frac{(x+2)^2}{25} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$.

Objectifs intermédiaires

1.2.3

REPRÉSENTER dans le plan, la région déterminée par l'union, l'intersection ou la différence de deux relations.

Commentaires

- Les élèves ont déjà représenté dans le plan une région déterminée par une relation (objectifs 1.2.4 (III) et 1.5.2 (IV) dans le cours de base, objectifs 3.2.13, 3.3.3, 3.3.7, 3.3.13 de l'option I et l'objectif 1.1.8 de l'option II). Le seul moment où ils ont travaillé avec plus d'une relation, c'est lorsqu'ils ont eu à représenter graphiquement un système d'inéquations du premier degré à deux variables afin de déterminer la région demandée (objectif 1.5.2).

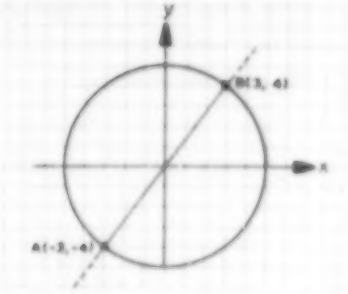
- Cet objectif demande de travailler avec deux relations et trois opérations ($\cap$, $\cup$ et $\setminus$). La diversité des situations est énorme. Si on s'attarde au tableau suivant, on aura une petite idée des différents cas possibles, sans toutefois en faire l'énumération complète (avec $\cap$ seulement):

$\cap$	droite	demi-plan	I(P)	P	E(P)	I(C)	C	E(C)	I(E)	E	E(E)	I(H)	H	E(H)
droite														
demi-plan														
I(P)														
P														
E(P)														
I(C)														
C														
E(C)														
I(E)														
E														
E(E)														
I(H)														
H														
E(H)														

I(P): intérieur de la parabole
P : parabole
E(P): extérieur de la parabole
etc.

Si nous avons deux relations représentées par des droites, elles peuvent être confondues, parallèles ou sécantes (3 cas pour droite-droite). Imaginez l'ensemble des cas possibles seulement pour l'intersection! Et que dire de l'ensemble des cas pour les 3 opérations?

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.2.3 REPRÉSENTER dans le plan, la région déterminée par l'union, l'intersection ou la différence de deux relations. (suite)	- On sait sans doute qu'il est difficile de privilégier un cas plus qu'un autre. Cependant il faut en choisir quelques-uns pour les besoins de la cause. Exemple 1: Représenter dans le plan la région déterminée par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - 3y = 0\}$. Une démarche possible serait: • Identifier les courbes (ou droites) associées aux relations données: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25\}$: un cercle $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - 3y = 0\}$: une droite • Tracer ces courbes (ou droites): D'après $x^2 + y^2 = 25$, on peut dire que le cercle est centré à l'origine et son rayon mesure 5 unités. Donc le tracer. La deuxième relation $(4x - 3y = 0)$ est représentée par une droite qui passe par les points $(0, 0)$, $(3, 4)$ et $(-3, -4)$, lorsqu'on cherche quelques points appartenant à la droite. Tracer cette droite. • DÉJÀ on a une très bonne idée des points communs aux deux relations (A et B). On trouve la valeur des coordonnées de ces points en résolvant le système d'équations données, puisqu'on demande l'intersection des deux relations. ① $x^2 + y^2 = 25$ ② $4x - 3y = 0 \rightarrow 4x = 3y$ $x = \frac{3y}{4}$



Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.2.3 REPRÉSENTER dans le plan, la région déterminée par l'union, l'intersection ou la différence de deux relations. (suite)	

Substituer dans ①

$$\left(\frac{3y}{4}\right)^2 + y^2 = 25$$

$$9y^2 + 16y^2 = 400$$

$$25y^2 = 400$$

$$y^2 = 16$$

$$y = \pm 4$$

Lorsque $y = 4$, $x = 3$

$y = -4$, $x = -3$.

Revenir à l'équation ②, sachant que $y = \pm 4$

$$x = \frac{3y}{4}$$

$$x = \frac{3 \times 4}{4}$$

$$x = \pm 3$$

Donc $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 25\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 4x - 3y = 0\}$ est $\{(3, 4), (-3, -4)\}$.

Exemple 2: Quelle est la région du plan représentée par:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 9x^2 + 25y^2 - 36x - 150y + 260 \leq 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 < 0\}?$$

- Transformer sous forme canonique les relations données:

a) $9x^2 + 25y^2 - 36x - 150y + 260 \leq 0$ devient, après quelques transformations: $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} \leq 1$.

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 < 0$ devient, après quelques transformations: $(x-2)^2 + (y-3)^2 < 16$.

- Identifier les courbes associées aux relations:

a) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} \leq 1$: une ellipse et son extérieur.

b) $(x-2)^2 + (y-3)^2 < 16$: un cercle et son intérieur.

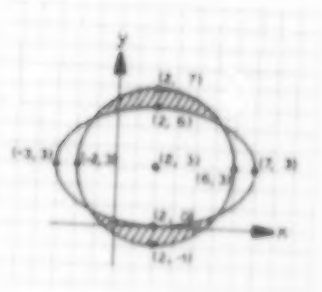
- Tracer ces courbes (à l'aide des équations):

a) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} \leq 1$:

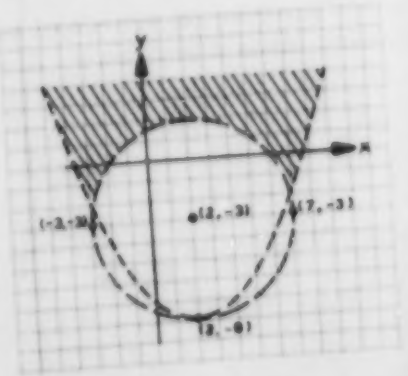
Une ellipse de centre $(2, 3)$ dont les sommets sont: $(7, 3)$, $(-3, 3)$, $(2, 0)$ et $(2, 6)$.

b) $(x-2)^2 + (y-3)^2 < 16$:

Un cercle de centre $(2, 3)$ et de rayon < 4.



Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.2.3 REPRÉSENTER dans le plan, la région déterminée par l'union, l'intersection ou la différence de deux relations. (suite)	• Régions représentées par les relations données: A = {(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$ | $9x^2 + 25y^2 - 36x - 150y + 260 \geq 0$}: est la région de l'ellipse (=) et de son extérieur. B = {(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$ | $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 \leq 0$}: est la région du cercle et de son intérieur. Donc A ∩ B est représentée par la partie hachurée du graphique. Exemple 2: Quelle région du plan est représentée par P\C lorsque P = {(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$ | $x^2 - 4x - 4y - 28 < 0$} et C = {(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$ | $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 < 0$}? • Transformer sous forme canonique: a) $x^2 - 4x - 4y - 28 < 0$, ce qui donne: $(x - 2)^2 < 4(y + 8)$. b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 < 0$, ce qui donne: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 < 25$. • Identifier les courbes associées aux relations: a) P = {(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$ | $(x - 2)^2 < 4(y + 8)$} est l'intérieur d'une parabole. b) C = {(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$ | $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 < 25$} est l'intérieur d'un cercle. rayon = 5 unités. • Tracer les courbes (à l'aide des équations): a) P: une parabole de sommet (2, -8) qui passe par (-2, -6), (6, -6), (-4, 1), (8, 1), (-5, 4) et (9, 4). b) C: un cercle de centre (2, -3) et de rayon = 5 unités. • Régions représentées par P et C: a) P: la région située à l'intérieur de la parabole. b) C: la région située à l'intérieur du cercle.



Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.2.3 REPRÉSENTER dans le plan, la région déterminée par l'union, l'intersection ou la différence de deux relations. (suite)	• Donc P∩C: la région hachurée du graphique. - Beaucoup d'autres situations pourraient être développées par les élèves. À vous d'en donner selon les besoins de vos groupes. - ENRICHISSEMENT Pour les élèves les plus intéressés par la chose, il serait intéressant de leur demander d'élaborer un programme sur ordinateur qui représente les courbes données et les régions demandées. Bien entendu, s'ils ont les préalables requis pour le faire.
1.2.4 TROUVER le domaine et l'image de l'union, de l'intersection ou de la différence de deux relations.	- Comme les objectifs précédents de ce chapitre, cet objectif a été vu pour chaque cas particulier (en option I: objectifs 3.1.5, 3.3.5, 3.3.9, 3.3.15, 4.2.3, 4.3.3; en option II: objectif 1.1.10). La nouveau dans cet objectif est qu'on travaille sur deux relations. Si on reprend les exemples de l'objectif précédent et qu'on veut trouver le domaine et l'image de ces exemples, on pourrait dire:

Exemple 1: Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25\}$,

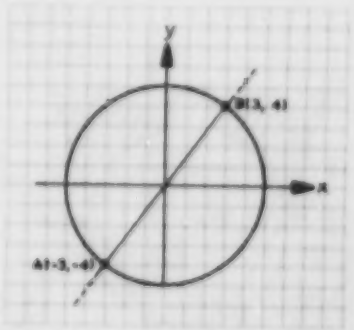
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - 3y = 0\}$.

On demandait $C \cap D$.

On a obtenu $(3, 4)$, $(-3, -4)$.

Si on demande maintenant de trouver le domaine et l'image de $C \cap D$, on peut dire que

$\text{dom}\,(C \cap D) = \{-3, 3\}$
$\text{ima}\,(C \cap D) = \{-4, 4\}$



Objectifs intermédiaires

1.2.4

TROUVER le domaine et l'image de l'union, de l'intersection ou de la différence de deux relations. (suite)

Commentaires

Exemple 2: Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 9x^2 + 25y^2 - 36x - 150y + 260 \geq 0\}$

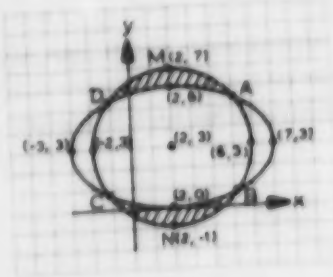
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 \leq 0\}$.

On demandait $E \cap C$.

On a obtenu les plages hachurées du graphique.

Si on demande maintenant de trouver le domaine et l'image de $E \cap C$, il faut connaître les valeurs des coordonnées des points critiques de cette situation.

On examine le graphique et on y va.



A. Les points de rencontre des deux coniques (A, B, C et D).

Pour trouver les coordonnées de ces quatre points, il faut résoudre le système d'équations qui représente les deux coniques:

① $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ ② $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$

Procéder par substitution en transformant ② dans le but d'obtenir la valeur de $(y-3)$.

Alors:

③ $(y-3)^2 = 16 - (x-2)^2$,

qu'on applique dans ①:

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{16-(x-2)^2}{9} = 1.$$

On obtient pour x les valeurs 5,31 et -1,31 qu'on substitue dans ③ pour obtenir:

$y = 5{,}25$ et $0{,}75$.

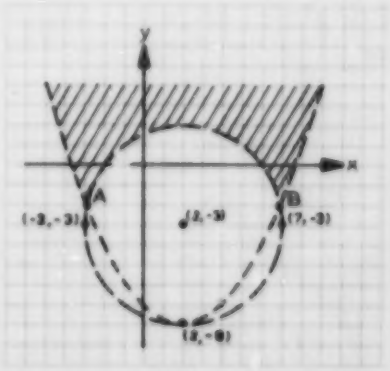
Donc les points A, B, C et D ont comme coordonnées:

A(5,31, 5,25); B(=,31, 0,75),

C(-1,31, 0,75); D(-1,31, 5,25).

B. Les points maximum et minimum (M et N) des plages concernées. Ici, à cause du cercle, il est facile de trouver les coordonnées des points M et N: M(2, 7) et N(2, -1).

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.2.4 TROUVER le domaine et l'image de l'union, de l'intersection ou de la différence de deux relations. (suite)	C. Limiter le domaine et l'image demandés: - Domaine: En examinant les points A, B, C, D, on voit que, pour les deux plages, x varie de 5,31 à -1,31. Donc: $\text{dom}(E \cap C) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1,31 \leq x \leq 5,31\}$. - Image: Il faut examiner les deux plages: - celle du haut, y varie de 5,25 à 7, - celle du bas, y varie de -1 à 0,75. Donc: $\text{ima}(E \cap C) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 0,75 \text{ et } 5,25 \leq y \leq 7\}$. Exemple 3: Soit $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2)^2 < 4(y + 8)\}$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2)^2 + (y + 3)^2 < 25\}$. On demandait $P \cap C$. On a obtenu la plage hachurée du graphique ci-dessous. On demande maintenant de trouver le domaine et l'image de $P \cap C$. On procède de façon similaire aux deux exemples précédents. A. À l'examen du graphique, les points critiques sont les points A et B. Pour trouver les coordonnées, on résout le système: ① $(x - 2)^2 = 4(y + 8)$, ② $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$. On obtient pour A et B: A(-2,9, -2), B(6,9, -2). Quant au point (2, -8), il n'est pas utile dans les circonstances.



Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.2.4 TROUVER le domaine et l'image de l'union, de l'intersection ou de la différence de deux relations. (suite)	8. Limiter le domaine et l'image : - Domaine : À l'examen du graphique, on peut dire que x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Donc : $\text{dom}(P \setminus C) = \mathbb{R}$. - Image : À l'examen du graphique, on peut dire que y varie de A ou B à $+\infty$. Donc : $\text{ima}(P \setminus C) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y < \infty\}$. - Bien entendu, on peut présenter aux élèves beaucoup d'autres situations selon leurs besoins. - Comme enrichissement, ne pas oublier l'ordinateur.

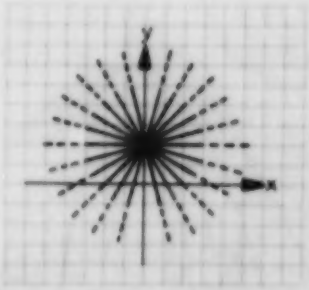
OBJECTIF TERMINAL N° : 1.3 RÉSOUDRE des problèmes utilisant des équations paramétriques pour définir un ensemble de lieux géométriques

Le dernier objectif terminal de cette section vise à familiariser les élèves aux équations paramétriques, c'est-à-dire au rôle de chaque paramètre dans chaque équation du 1^{er} ou du 2^{e} degré. C'est l'occasion pour l'élève de faire une bonne synthèse des notions se rapportant à la droite et aux coniques (parabole, cercle, ellipse et hyperbole).

Le tableau-synthèse présenté à l'objectif 1.1.8 dans la partie du contenu pourrait être rempli par les élèves si on leur donne la colonne "équations" et si on leur demande de remplir les autres colonnes, en leur précisant quelques conditions afin de les guider dans ce travail.

Il faut aussi mentionner que les équations paramétriques permettent aux élèves de généraliser et d'abstraire tout en formalisant les notions ou les propriétés acquises.

OBJECTIF TERMINAL N°: 1.3 RÉSOUDRE DES PROBLÈMES UTILISANT DES ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES POUR DÉFINIR UN ENSEMBLE DE LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.3.1 L'équation paramétrique associée à une famille de droites, de paraboles, de cercles, d'ellipses centrées à l'origine ou d'hyperboles centrées à l'origine étant donnée, TRACER dans le plan quelques éléments de cette famille.	- Il faut définir deux termes ici: PARAMÈTRE Un paramètre est une constante indéterminée, c'est-à-dire une constante qui varie. Exemples: Dans l'équation $y = px + 3$, p est un paramètre. Dans l'équation $y = 4x - b$, b est un paramètre. Dans l'équation $ax^2 + 9y^2 = 144$, a est un paramètre. ÉQUATION PARAMÉTRIQUE Une équation paramétrique est une équation qui contient au moins un paramètre. Voici quelques exemples d'équations paramétriques: 1. $y = px + 3$ 2. $ax^2 + bx + 5 = 0$ 3. $y = m(x + 2) + 5$ 4. $\frac{x}{a} + \frac{y}{5} = 1$ 5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 6. $Ax + Cy + Dx + Ey + F = 0$ - On travaille toujours avec les nombres réels, sauf si un autre référentiel est spécifié dans la donnée. Familles de droites - La famille des droites concourantes en un point. À l'aide d'exemples du genre $y = mx + 2$, il faut demander aux élèves de tracer quelques droites qui correspondent à cette équation, selon les valeurs qu'ils attribueront au paramètre m. Ils découvriront que l'ensemble des droites tracées se rencontrent au point (0, 2). Ils déduiront que les équations paramétriques de cette forme représentent *la famille des droites concourantes en un point.* 

Objectifs intermédiaires

1.3.1

L'équation paramétrique associée à une famille de droites, de paraboles, de cercles, d'ellipses centrées à l'origine ou d'hyperboles centrées à l'origine étant donnée, TRACER dans le plan quelques éléments de cette famille. (suite)

Commentaires

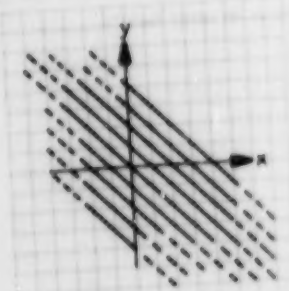
ENRICHISSEMENT

On peut demander aux élèves intéressés de découvrir les conditions nécessaires pour obtenir une famille de droites concourantes lorsque l'équation donnée est: $ax + by + c = 0$. Ils devraient arriver à la conclusion suivante:

Si $b \neq 0$, le quotient $\frac{c}{b}$ doit être le même (fixe) pendant que le quotient $\frac{a}{b}$ varie, car l'équation $ax + by + c = 0$ est équivalente à $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, ce qui respecte la forme de l'équation paramétrique $y = mx + 2$ de notre exemple.

- La famille des droites parallèles entre elles.

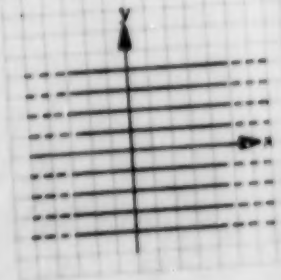
Il faut demander aux élèves de tracer quelques droites associées à l'équation $y = -x + b$. Ils découvriront que l'ensemble des droites tracées sont parallèles entre elles. Ils déduiront que l'équation de cette forme représente *la famille des droites parallèles entre elles*.



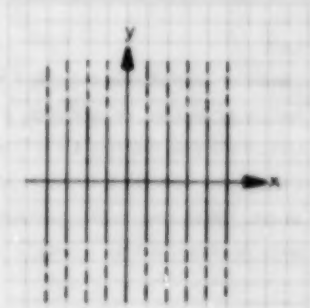
Deux cas particuliers attirent notre attention:

1. Le cas $y - p = 0$ (p étant le paramètre).

À l'examen du graphique de droite, on peut déduire que l'équation paramétrique de cette forme représente la famille des droites horizontales ou, si vous préférez, la famille des droites parallèles à l'axe des "x".



Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.3.1 L'équation paramétrique associée à une famille de droites, de paraboles, de cercles, d'ellipses centrées à l'origine ou d'hyperboles centrées à l'origine étant donnée, TRACER dans le plan quelques éléments de cette famille. (suite)	2. Le cas $x - p = 0$ (p étant le paramètre). On voit ici que l'équation paramétrique de cette forme représente la famille des droites verticales ou la famille des droites parallèles à l'axe des "y".



ENRICHISSEMENT

Demander aux élèves de découvrir les conditions nécessaires pour obtenir une famille de droites parallèles, lorsque l'équation donnée est $ax + by + c = 0$. Ils concluront que:

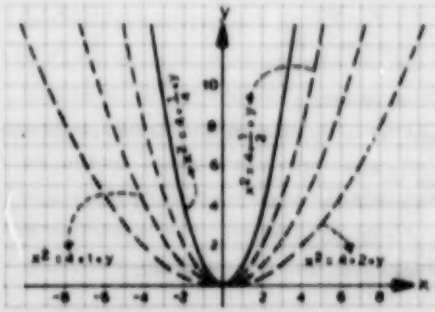
Si $b \neq 0$, le quotient $-\frac{a}{b}$ doit être fixe pendant que $-\frac{c}{b}$ varie.

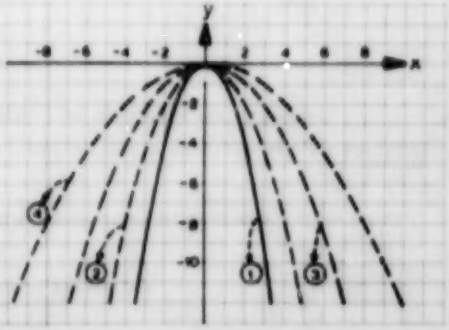
Familles de paraboles

On examine l'équation paramétrique de la forme $x^2 = 4ay$ où a est le paramètre.

Soit ① $a = \frac{1}{4}$ ② $a = \frac{1}{2}$ ③ $a = 1$ ④ $a = 2$

Soit ① $a = -\frac{1}{4}$ ② $a = -\frac{1}{2}$ ③ $a = -1$ ④ $a = -2$





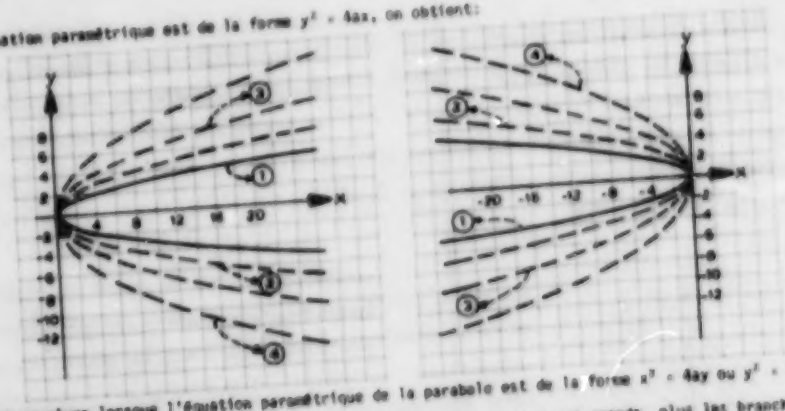
Objectifs intermédiaires

1.3.1

L'équation paramétrique associée à une famille de droites, de paraboles, de cercles, d'ellipses centrées à l'origine ou d'hyperboles centrées à l'origine étant donnée, TRACER dans le plan quelques éléments de cette famille. (suite)

Commentaires

Si l'équation paramétrique est de la forme $y^2 = 4ax$, on obtient:



On peut conclure, lorsque l'équation paramétrique de la parabole est de la forme $x^2 = 4ay$ ou $y^2 = 4ax$, que le sommet est (0, 0), quelle que soit la valeur de a. Et plus |a| est grande, plus les branches de la parabole s'écartent.

On s'attarde à la forme $(x - h)^2 = 4a(y - k)$ ou $(y - k)^2 = 4a(x - h)$.

Sans développer tous les cas possibles, on demande aux élèves de tracer quelques graphiques des équations paramétriques suivantes et aussi d'énoncer ce qui se passe lorsque le paramètre varie.

1. $y = (x - h)^2$
2. $y - k = x^2$
3. $y - m = (x - m)^2$
4. $x - k = (y - h)^2$ (h et k sont des paramètres)

<u>Familles de cercles</u>

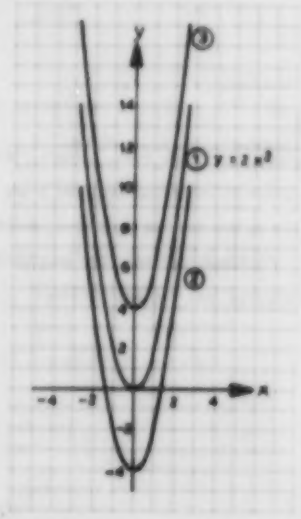
Tracer les cercles associés aux équations paramétriques suivantes:

1. $x^2 + y^2 = r^2$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$
2. $(x - h)^2 + y^2 = 16$
3. $x^2 + (y - k)^2 = 25$

Que pouvez-vous dire de ces équations?

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.3.1 L'équation paramétrique associée à une famille de droites, de paraboles, de cercles, d'ellipses centrées à l'origine ou d'hyperboles centrées à l'origine étant donnée, TRACER dans le plan quelques éléments de cette famille. (suite)	Familles d'ellipses centrées à l'origine Tracer les ellipses associées aux équations paramétriques suivantes: 1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 2. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Que pouvez-vous dire de ces équations? Familles d'hyperboles centrées à l'origine Tracer les hyperboles associées aux équations paramétriques suivantes: 1. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$ 2. $\frac{x^2}{196} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Que pouvez-vous dire de ces équations?
1.3.2 Certaines conditions étant données, TROUVER l'équation paramétrique associée à une famille de droites, de paraboles, de cercles, d'ellipses centrées à l'origine ou d'hyperboles centrées à l'origine.	- Après avoir suivi la démarche de l'objectif 1.3.1, les élèves pourront plus facilement trouver les équations paramétriques associées aux familles données. Sans dresser une liste exhaustive des possibilités (ce qui serait beaucoup trop long), nous vous en citons quelques-unes, sachant bien que vous en ajouterez au besoin. Trouver l'équation paramétrique associée à la famille: • de droites parallèles à $y = 3x + 5$, • de droites perpendiculaires à $2x - 5y + 6 = 0$, • de droites qui se rencontrent au point $(0, -4)$, • de paraboles dont le sommet passe par l'origine et dont l'axe de symétrie est l'axe des "y", • de paraboles dont les sommets sont sur l'axe des "y", dont les axes de symétrie sont l'axe des "y" et qui possèdent le même "a", • de paraboles qui possèdent le même "a" et dont les axes de symétrie sont parallèles à l'axe des "y", • de cercles centrées à l'origine, • de cercles de même rayon dont le centre se déplace sur l'axe des "x",

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.3.2 Certaines conditions étant données, TROUVER l'équation paramétrique associée à une famille de droites, de paraboles, de cercles, d'ellipses centrées à l'origine ou d'hyperboles centrées à l'origine. (suite)	• de cercles de même rayon dont le centre se déplace sur l'axe des "y", • d'ellipses centrées à l'origine dont le grand axe est 24, • d'ellipses centrées à l'origine dont le petit axe est 10, • d'ellipses centrées à l'origine dont deux des sommets passent par (-5, 0) et (5, 0), • d'hyperboles centrées à l'origine dont le grand axe est 36, • d'hyperboles qui passent par les sommets (0, -4) et (0, 4), • d'hyperboles dont b = 3, • etc. Voici quelques exemples de familles de paraboles: A. La famille de paraboles représentée par les graphiques de droite est la famille des paraboles de la forme $y = 2x^2 + k$ où: ① k = 0 ② k = -4 ③ k = 4 Si on veut donner la forme connue, il faut transformer l'équation et on obtient: $x^2 = \frac{1}{2}(y - k)$.



Objectifs intermédiaires

1.3.2

Certaines conditions étant données, TROUVER l'équation paramétrique associée à une famille de droites, de paraboles, de cercles, d'ellipses centrées à l'origine ou d'hyperboles centrées à l'origine. (suite)

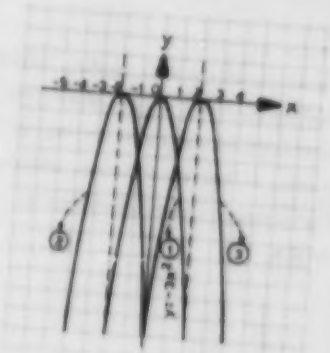
Commentaires

B. La famille de paraboles représentée par les graphiques de droite est la famille des paraboles de la forme $(x - h)^2 = -\frac{1}{2}y$ où:

① $h = 0$

② $h = -2$

③ $h = 2$

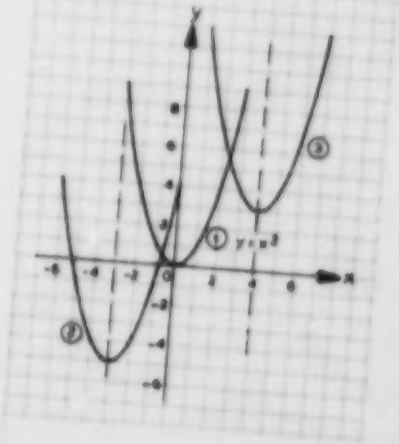


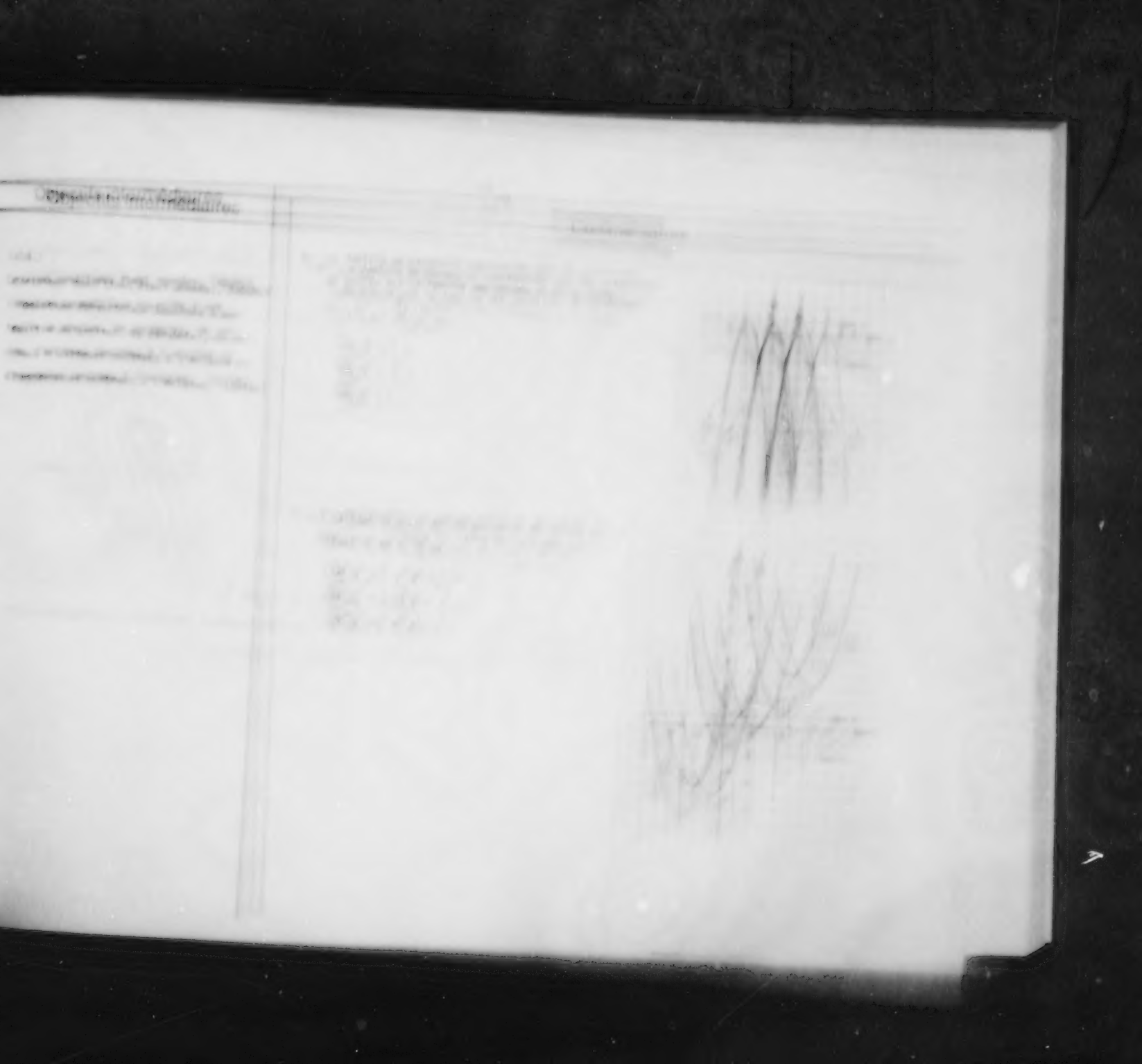
C. La famille associée aux paraboles de droite est la famille de la forme $(y - k) = (x - h)^2$ où:

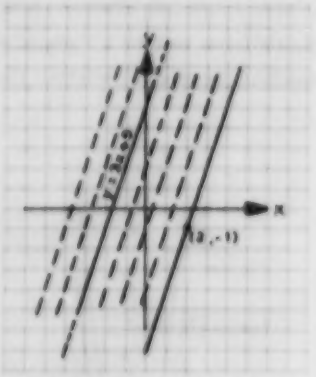
① $h = 0$ et $k = 0$

② $h = -3$ et $k = -5$

③ $h = 4$ et $k = 3$





Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.3.3 Certaines conditions étant données, TROUVER l'équation associée à un lieu géométrique appartenant à une famille de droites, de paraboles, de cercles, d'ellipses centrées à l'origine ou d'hyperboles centrées à l'origine.	- Cet objectif est un cas particulier de l'objectif précédent. Généralement, il faut ajouter une condition particulière aux données de l'objectif 1.3.2 et les élèves pourront trouver l'équation demandée. Exemple: Trouver l'équation associée à la famille de droites parallèles à $y = 3x + 5$ qui passe par le point $(2, -1)$. Voici une démarche possible: 1. On trace le graphique de la droite donnée. 2. On trace quelques droites de cette famille de parallèles. 3. On écrit l'équation paramétrique $y = 3x + b$. 4. On trouve l'équation de la droite de cette famille qui passe par $(2, -1)$. $m = 3$ et un point $(2, -1)$ alors $\frac{y-(-1)}{(x-2)} = \frac{3}{1}$ $\therefore y = 3x - 7$.  On peut donner aux élèves plusieurs exemples en s'aidant des suggestions données à l'objectif 1.3.2 et en y ajoutant une condition particulière.

OBJECTIF GÉNÉRAL

N°: 2

Thème: FONCTIONS RÉELLES

Durée: 45 HEURES

OBJECTIF GÉNÉRAL N°: 2

FAVORISER chez l'élève l'utilisation de certaines fonctions réelles comme outil de mathématisation.

La poursuite des études post-secondaires exige des élèves une connaissance approfondie de certaines fonctions.

Dans cet objectif général on étudiera trois types de fonctions réelles, à savoir des fonctions:

- polynomiales,
- particulières,
- trigonométriques.

OBJECTIF TERMINAL N°: 2.1

RÉSOUDRE des problèmes se traduisant par des fonctions polynomiales d'un degré inférieur à quatre.

L'étude des fonctions polynomiales fait suite à celle de la notion de fonction vue dans le cours de l'option I (objectif 4.1).

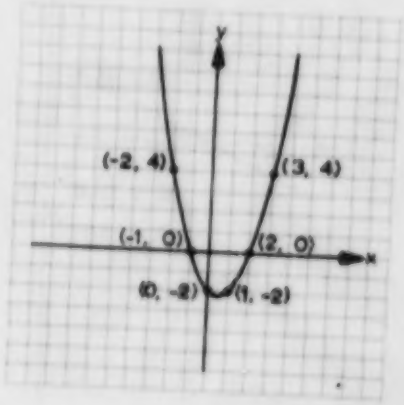
Ces fonctions polynomiales de degré 0, 1, 2 (facultatif: degré 3) permettront à l'élève de mieux saisir la notion de fonction si importante dans l'ensemble des cours de mathématique du collégial.

La fonction polynomiale se définit comme étant toute fonction réelle dans laquelle l'image d'un élément est une expression polynomiale. Les objectifs intermédiaires permettront d'étudier le tracé graphique d'une telle fonction, de faire l'analyse de ses principales propriétés et d'en déduire sa réciproque.

Dans toutes les situations où le micro-ordinateur s'avère utile pour la compréhension d'une notion ou pour une meilleure visualisation d'un graphique, il est fortement recommandé de l'utiliser.

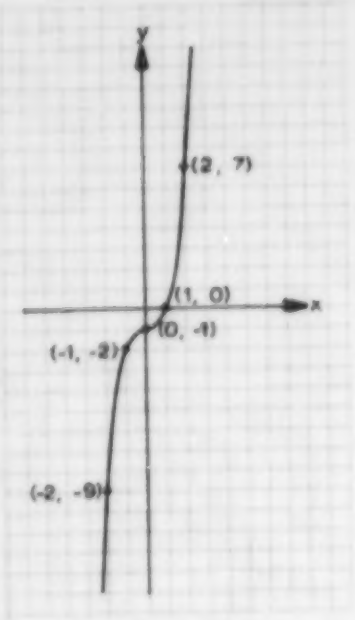
Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.1 TRACER le graphique cartésien d'une fonction polynomiale.	- Une fonction polynomiale f se définit par $f : x \longmapsto$ une expression polynomiale. Exemples: - $f_1 : x \longmapsto 5$ (fonction polynomiale de degré 0) - $f_2 : x \longmapsto 2x - 1$ (fonction polynomiale de degré 1) - $f_3 : x \longmapsto x^2 - 3x + 4$ (fonction polynomiale de degré 2) - enrichissement: $f_4 : x \longmapsto x^3 - 8$ (fonction polynomiale de degré 3) - Le tracé du graphique cartésien d'une fonction polynomiale se fera à partir d'une grille de valeurs établies en utilisant la calculatrice afin d'accélérer l'évaluation de cette fonction. On utilise la méthode point par point: il faut se donner suffisamment de points pour constater certaines tendances qui se dégageront lors de l'étude des propriétés dans les objectifs subséquents. Exemple 1: Quelle est la représentation graphique de la fonction réelle f définie par $f : x \longmapsto x^2 - x - 2$?

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	4	0	-2	-2	0	4

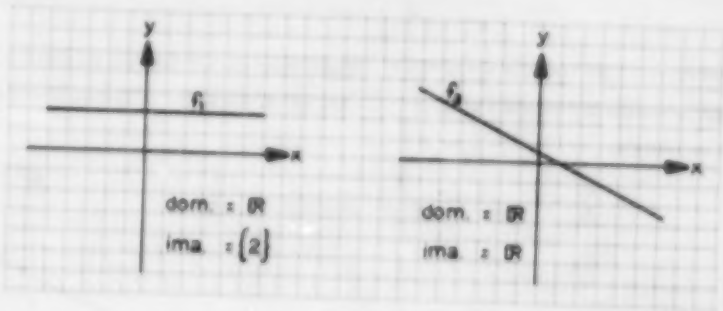


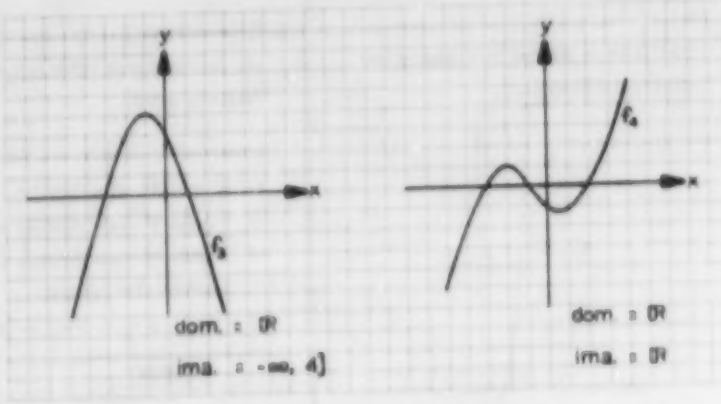
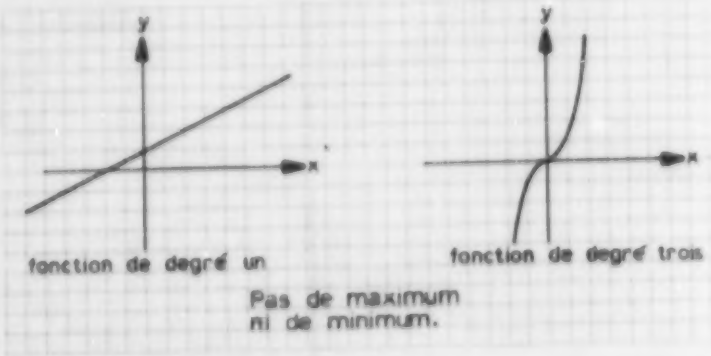
Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.1 TRACER le graphique cartésien d'une fonction polynomiale. (suite)	Exemple 2: Quelle est la représentation graphique de la fonction réelle f définie par 531 $f : x \longmapsto x^3 - 1$? N.B.: Les objectifs intermédiaires qui suivent permettront à l'élève de tracer avec plus de précision et de rapidité les courbes des différentes fonctions polynomiales.

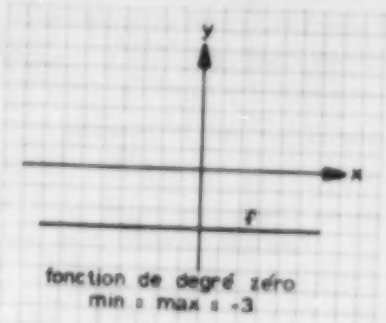
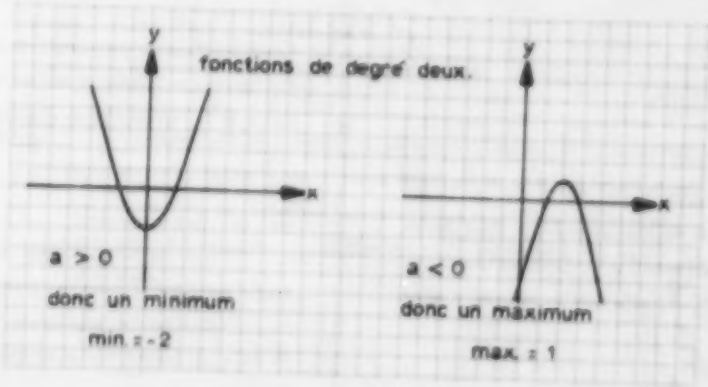
x	-2	-1	0	1	2
f(x)	-9	-2	-1	0	7

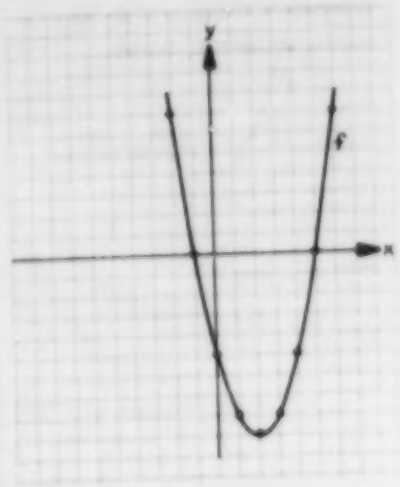


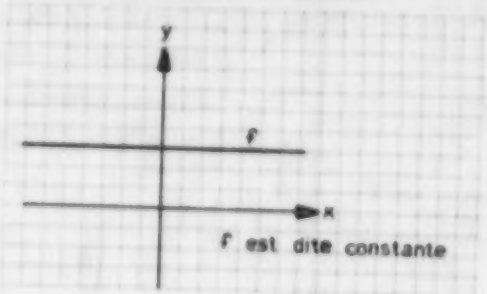
Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.2 IDENTIFIER le domaine et l'image d'une fonction polynomiale.	- Faire observer à partir d'un éventail de fonctions polynomiales d'un degré inférieur à quatre que toutes ces fonctions sont définies sur la totalité de l'ensemble des réels, c'est-à-dire que le domaine de ces fonctions est $\mathbb{R}$. - L'observation de plusieurs fonctions polynomiales d'un degré inférieur à quatre montre que: a) l'image de toute fonction constante (de degré zéro) est un singleton; b) l'image de toute fonction polynomiale de degré un est $\mathbb{R}$; c) l'image de toute fonction polynomiale de degré deux est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (voir objectif intermédiaire suivant); d) l'image de toute fonction polynomiale de degré trois est $\mathbb{R}$. Exemples:



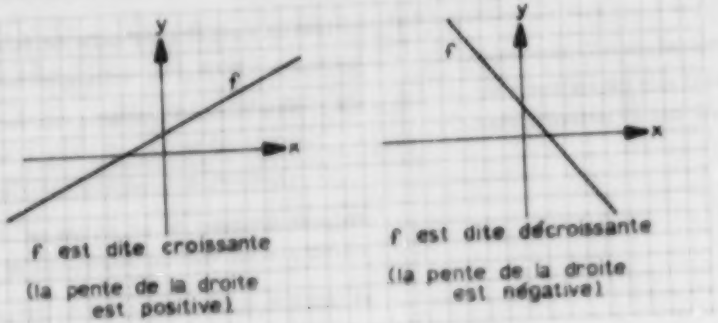
Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.2 IDENTIFIER le domaine et l'image d'une fonction polynomiale. (suite)	Exemples : 
2.1.3 DÉTERMINER le minimum ou le maximum d'une fonction polynomiale.	- Étant donné que les fonctions polynomiales de degré un et de degré trois ont comme image ℝ, il n'y a donc pas de minimum ni de maximum pour ces types de fonctions. Exemples : 

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.3 DÉTERMINER le minimum ou le maximum d'une fonction polynomiale. (suite)	- Dans le cas de la fonction polynomiale du degré zéro, c'est-à-dire la fonction constante, l'image fournit directement le maximum et le minimum de cette fonction. C'est en fait la valeur représentée par le singleton. Exemple:  - La fonction polynomiale de degré deux se distingue pour la détermination du maximum ou du minimum. Ce maximum (ou minimum) a toujours comme valeur $\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$ ou $\frac{-\Delta}{4a}$ (cf. option I, objectif 2.2.7 et option II, objectif 1.1.4). Exemples: 

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.3 DÉTERMINER le minimum ou le maximum d'une fonction polynomiale. (suite)	Exemple: Quel est le maximum ou le minimum de la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x - 5$? Sachant que $a = 1$, $b = -4$ et $c = -5$, on a: $\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(16 + 20)}{4} = \frac{-36}{4} = -9$. Donc le minimum (car $a > 0$) de f est -9.  - Dans toute fonction polynomiale de degré trois, il n'y a pas de maximum (ou de minimum) <u>absolu</u>. Dans ce cas, on parlera de maximum (ou minimum) <u>relatif</u> qu'on peut calculer d'une façon approximative à l'aide de la représentation graphique de cette fonction.
2.1.4 Une fonction polynomiale étant donnée, DÉTERMINER si elle est croissante ou décroissante dans un intervalle donné.	- Lors du tracé graphique d'une fonction polynomiale, on a pu observer que certaines d'entre elles présentent la situation suivante: - plus les "x" augmentent, plus les "f(x)" ou "y" augmentent, tandis que d'autres fonctions présentent la situation: - plus les "x" augmentent, plus les "f(x)" ou "y" diminuent. On est alors amené à parler de croissance et de décroissance d'une fonction.

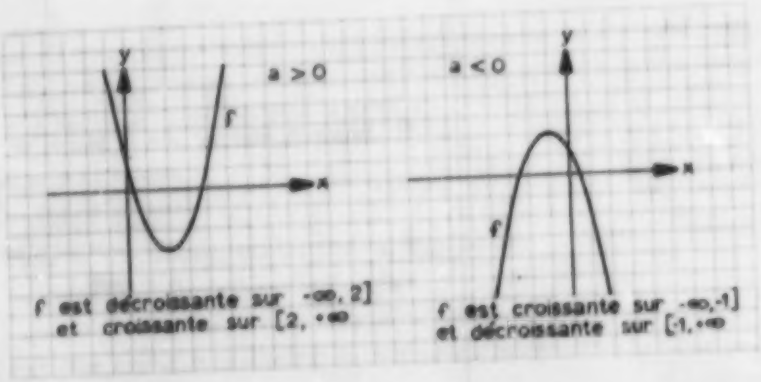
Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.4 Une fonction polynomiale étant donnée, DÉTERMINER si elle est croissante ou décroissante dans un intervalle donné. (suite)	La fonction f est dite croissante ssi $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ et elle est décroissante ssi $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. N.B.: Faire la distinction entre une fonction croissante et une fonction strictement croissante qui se définit par $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Cette distinction a déjà été formulée auparavant lors de la notion d'inclusion stricte ($\subset$) et d'inclusion large ($\subseteq$). Analysons maintenant ces définitions par rapport aux quatre types de fonctions polynomiales à l'étude, c'est-à-dire les fonctions polynomiales de degré zéro, un, deux ou trois. a) <u>fonction de degré zéro</u>: dans ce type de fonction, la fonction est à la fois croissante et décroissante. On dit qu'elle est constante.  b) <u>fonction de degré un</u>: ici, la fonction est soit croissante, soit décroissante. Si la pente (voir objectif 3.2.4, option I) de la droite représentant cette fonction est positive, la fonction est alors dite croissante sur tout l'intervalle donné. Si cette pente est négative, la fonction est alors décroissante sur tout l'intervalle donné.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.4 Une fonction polynomiale étant donnée, DÉTERMINER si elle est croissante ou décroissante dans un intervalle donné. (suite)	



c) Fonction de degré deux:

- une fonction représentée par une parabole ouverte vers le haut ($a > 0$) est décroissante pour l'intervalle $]-\infty, \frac{-b}{2a}]$ et croissante pour l'intervalle $[\frac{-b}{2a}, +\infty[$.
- une fonction représentée par une parabole ouverte vers le bas ($a < 0$) est croissante pour l'intervalle $]-\infty, \frac{-b}{2a}]$ et décroissante pour l'intervalle $[\frac{-b}{2a}, +\infty[$.



Objectifs intermédiaires

2.1.4

Une fonction polynomiale étant donnée, DÉTERMINER si elle est croissante ou décroissante dans un intervalle donné. (suite)

2.1.5

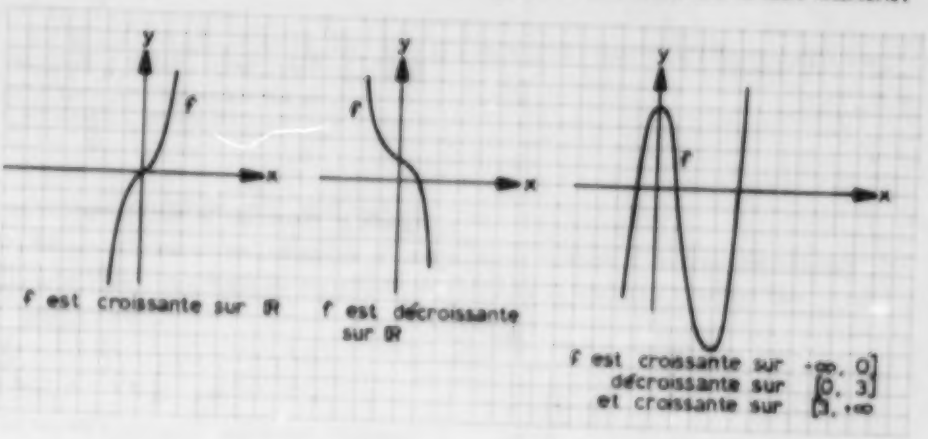
DÉTERMINER si une fonction polynomiale est additive ou homogène. [531]

Commentaires

[531]

d) fonction de degré trois: on ne considère ici que les cas simples où:

- la courbe coupe l'axe des x en un seul point ... { la fonction est soit croissante soit décroissante.
- la courbe coupe l'axe des x en plus d'un point... { la fonction est croissante dans un intervalle donné et décroissante dans un autre intervalle.



N.B.: - Cet objectif est facultatif pour le programme 064-534.

- Ici il s'agit tout simplement de faire vérifier algébriquement les propriétés d'additivité et d'homogénéité.

- Une fonction est dite additive ssi $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ et elle est dite homogène ssi $\forall k, x \in \mathbb{R} : f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$.

Objectifs intermédiaires	Commentaires

2.1.5

DÉTERMINER si une fonction polynomiale est additive ou homogène. (suite)

Exemple 1: Montrer que la fonction f définie par $f : x \longmapsto x - 2$ n'est pas additive.

On doit montrer que $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$

$(x_1 + x_2) - 2 \overset{?}{=} (x_1 - 2) + (x_2 - 2)$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$x_1 + x_2 - 2 \neq x_1 + x_2 - 4$

Exemple 2: Montrer que la fonction f définie par $f : x \longmapsto x$ est additive.

On doit montrer que $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$x_1 + x_2 = x_1 + x_2$

Exemple 3: Montrer que la fonction f définie par $f : x \longmapsto x^2 + 4$ n'est pas homogène.

On doit montrer que $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$(kx)^2 + 4 \overset{?}{=} k \cdot (x^2 + 4)$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$k^2x^2 + 4 \neq kx^2 + 4k$

Exemple 4: Montrer que la fonction f définie par $f : x \longmapsto 2x$ est homogène.

On doit montrer que $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$2 \cdot k \cdot x \overset{?}{=} k \cdot (2x)$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$2kx = 2kx$

Objectifs intermédiaires

2.1.6

TROUVER la réciproque d'une fonction polynomiale du premier ou du second degré.

Commentaires

- En référence à l'objectif 4.1.6 du programme de l'option I dans lequel l'élève a étudié la réciproque d'une fonction, il a été établi que $\text{dom } f = \text{ima } f^{-1}$ et $\text{ima } f = \text{dom } f^{-1}$. Par suite, si $(x, y) \in f$, alors $(y, x) \in f^{-1}$.

  Partant de ces notions, si f est la fonction définie par $f : x \longmapsto x + 3$, alors on aura comme équation de $f : y = x + 3$.

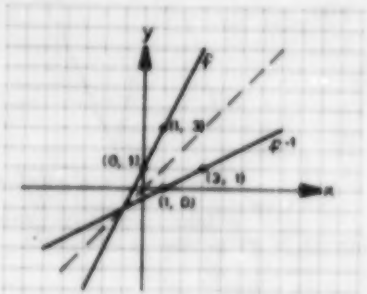
  Pour trouver la réciproque, on remplace x par y et y par x; d'où l'équation de f^{-1} sera $x = y + 3$ ou bien $y = x - 3$.

  f^{-1} sera donc définie par $f^{-1} : x \longmapsto x - 3$.

- Graphiquement, dans le plan cartésien, toute représentation de f^{-1} est symétrique à celle de f par rapport à la bissectrice des 1^{er} et 3^{e} quadrants.

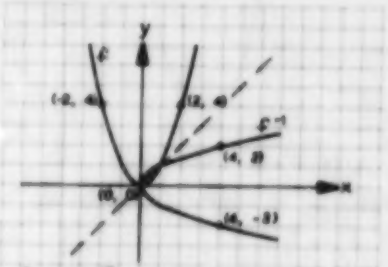
  L'élève peut alors utiliser la technique de construction vue en géométrie des transformations pour trouver l'image d'une figure par une réflexion dont l'axe est la bissectrice citée plus haut.

Exemple 1 :

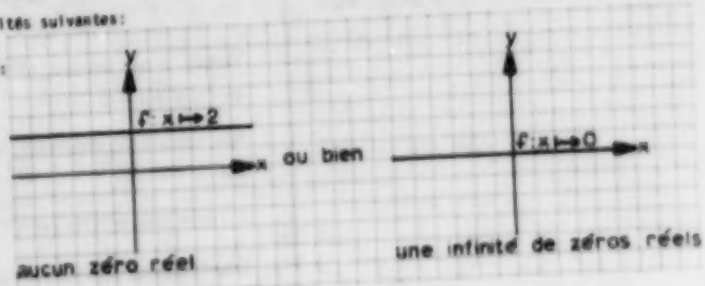
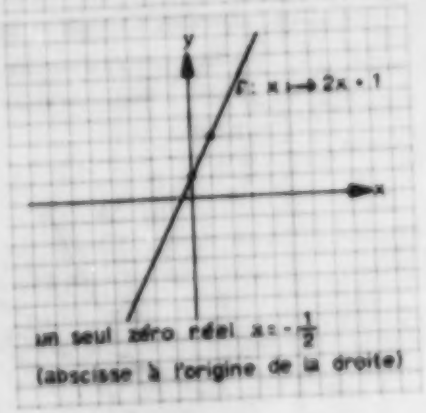


f: $y = 2x + 1$
f^{-1}: $x = 2y + 1$ ou bien $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

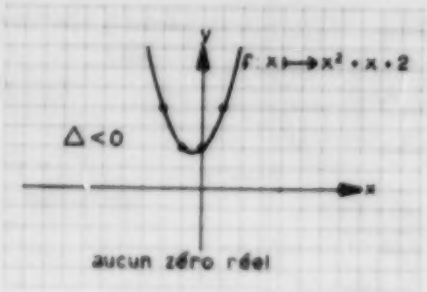
Exemple 2 :



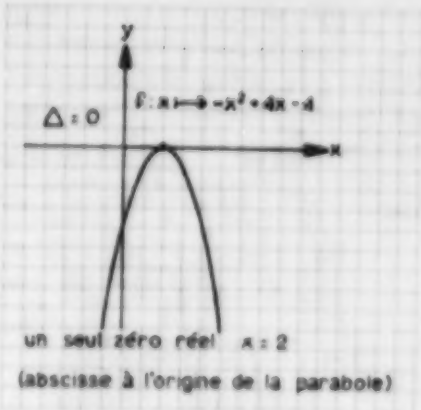
f: $y = x^2$
f^{-1}: $x = y^2$ ou bien $y = \pm\sqrt{x}$
(avec $x \geq 0$)

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.7 **DÉTERMINER** les zéros, s'ils existent, d'une fonction polynomiale.	- Un zéro d'une fonction est la valeur que prend x lorsque f(x) = 0 (y = 0). Pour déterminer les zéros d'une fonction il suffit donc de poser f(x) = 0 (y = 0). Ainsi on aura les possibilités suivantes: a) fonction de degré zéro:  b) fonction de degré un: 

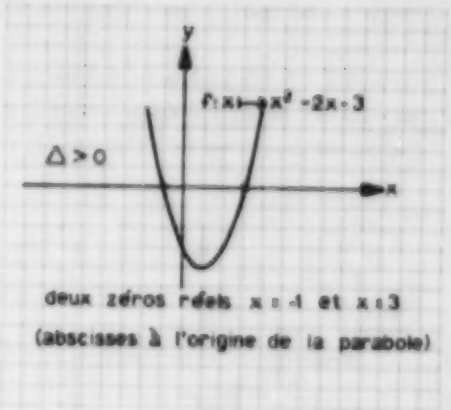
Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.7 DÉTERMINER les zéros, s'ils existent, d'une fonction polynomiale. (suite)	c) fonction de degré deux:



aucun zéro réel



un seul zéro réel x = 2
(abscisse à l'origine de la parabole)



deux zéros réels x = -1 et x = 3
(abscisses à l'origine de la parabole)

Objectifs intermédiaires

2.1.7

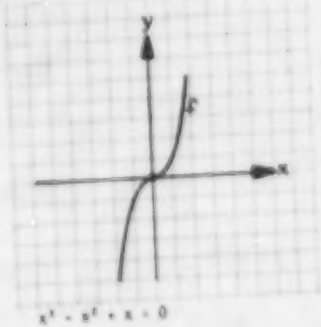
DÉTERMINER les zéros, s'ils existent, d'une fonction polynomiale. (suite)

Commentaires

d) fonction de degré trois: on limite l'étude de cette fonction à des cas où les zéros sont obtenus, s'il y a lieu, par factorisation simple.

531

1er cas:



$f : x \longmapsto x^3 - x^2 + x$

Dans la recherche des zéros, on peut décomposer l'expression polynomiale du 3e degré en un produit d'un polynôme du 1er degré par un polynôme du 2e degré.

Selon que ce dernier se décompose ou pas, on obtiendra pour la fonction polynomiale du 3e degré, soit 1 zéro réel, soit 2 zéros réels distincts, soit 3 zéros réels distincts.

$x^3 - x^2 + x = 0$

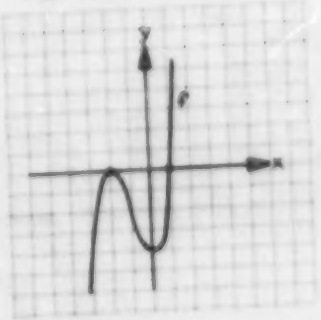
$x(x^2 - x + 1) = 0$

$x = 0$ ou $x^2 - x + 1 = 0$

↓ ↓

1 zéro réel aucun zéro réel car $\Delta < 0$

2e cas:



$f : x \longmapsto (x - 1)(x + 2)(x + 2)$

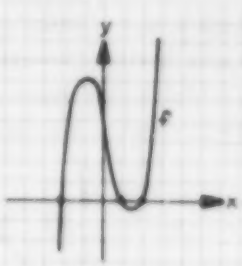
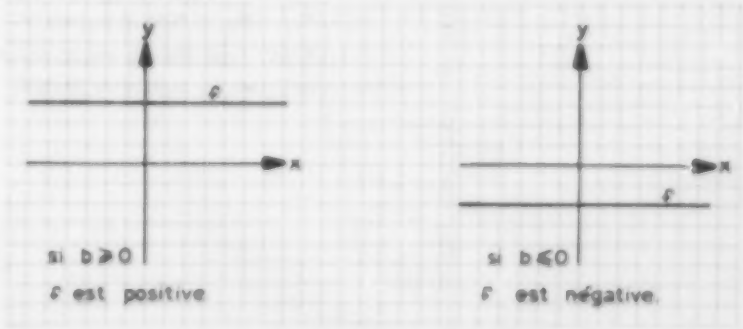
Ici l'expression polynomiale du 3e degré est déjà factorisée en un produit de 3 polynômes du 1er degré.

On aura: $(x - 1)(x + 2)(x + 2) = 0$

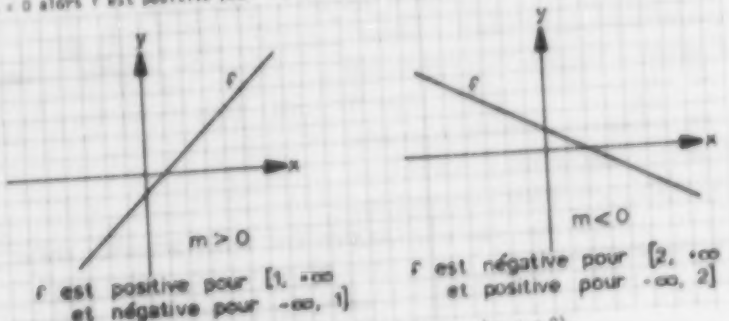
$x - 1 = 0$ ou $x + 2 = 0$ ou $x + 2 = 0$

$x = 1$ ou $x = -2$

donc 2 zéros réels distincts.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.7 DÉTERMINER les zéros, s'ils existent, d'une fonction polynomiale. (suite)	3e cas:  $f : x \longmapsto x^3 - x^2 - 4x + 4$ Ici l'expression polynomiale du 3e degré se factorise simplement par la mise en évidence répétée: $(x - 1)(x^2 - 4) = 0$ et ensuite $(x - 1)(x + 2)(x - 2) = 0$ $x - 1 = 0$ ou $x + 2 = 0$ ou $x - 2 = 0$ $x = 1$ ou $x = -2$ ou $x = 2$ donc 3 zéros réels distincts.
2.1.8 DÉTERMINER le signe d'une fonction polynomiale.	- Le signe d'une fonction polynomiale dans un intervalle donné est le signe des images des x (i.e. des f(x)) dans cet intervalle. Ainsi pour: - une fonction constante définie par $f : x \longmapsto b$ on aura une fonction positive si $b > 0$, c'est-à-dire si la parallèle à l'axe des x représentant la fonction f est au-dessus de l'axe des x ou est l'axe des x; elle sera négative si $b < 0$, c'est-à-dire si la parallèle à l'axe des x est au-dessous de l'axe des x ou est l'axe des x. 

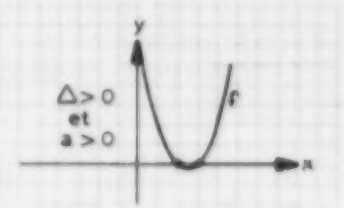
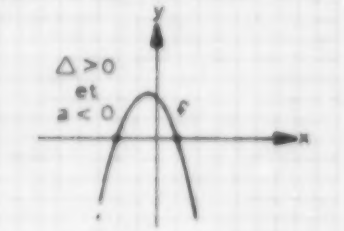
Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.8 DÉTERMINER le signe d'une fonction polynomiale. (suite)	- une fonction de degré un définie par $f : x \longmapsto mx + b$ $(m \neq 0)$, sachant que b représente l'ordonnée à l'origine. si $m > 0$ alors f est négative pour $]-\infty, a]$ et positive pour $[a, +\infty$ si $m < 0$ alors f est positive pour $]-\infty, a]$ et négative pour $[a, +\infty$



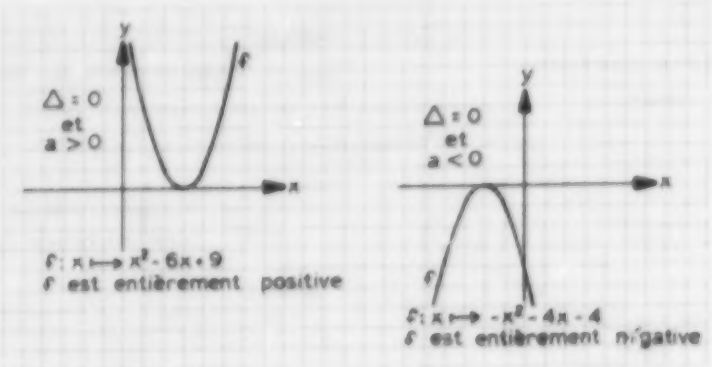
- une fonction de degré deux définie par $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ $(\text{ou } a \neq 0)$.

si $\Delta > 0$, on aura les cas suivants:

- si $a > 0$ alors f est positive pour $]-\infty, x_1]$ et pour $[x_2, +\infty$ et négative pour $[x_1, x_2]$ (où x_1 et x_2 sont les zéros de la fonction);
- si $a < 0$ alors f est négative pour $]-\infty, x_1]$ et pour $[x_2, +\infty$ et positive pour $[x_1, x_2]$ (où x_1 et x_2 sont les zéros de la fonction).

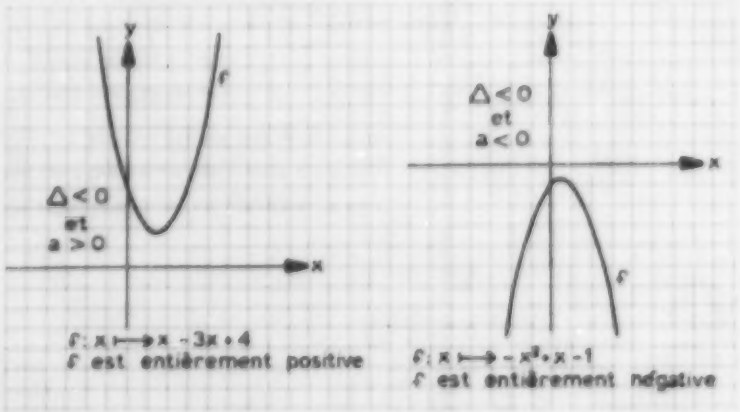
Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.8 DÉTERMINER le signe d'une fonction polynomiale. (suite)	Exemple 1:  $f : x \longmapsto x^2 - 5x + 6$ f est positive pour $]-\infty, 2]$ et pour $[3, +\infty[$ et négative pour $[2, 3]$. Exemple 2:  $f : x \longmapsto -x^2 - x + 2$ f est négative pour $]-\infty, -2]$ et pour $[1, +\infty[$ et positive pour $[-2, 1]$. si $\Delta = 0$, on aura les cas suivants: • si $a > 0$ alors f est entièrement positive; • si $a < 0$ alors f est entièrement négative.

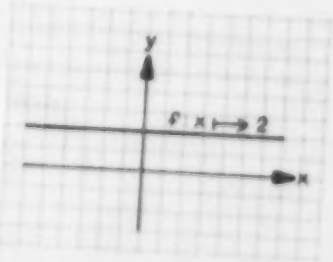
Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.8 DÉTERMINER le signe d'une fonction polynomiale. (suite)	

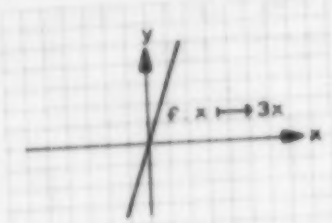
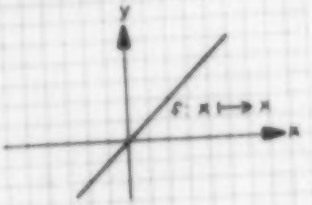
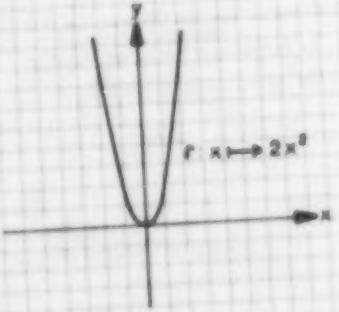


si $\Delta < 0$, on aura les cas suivants:

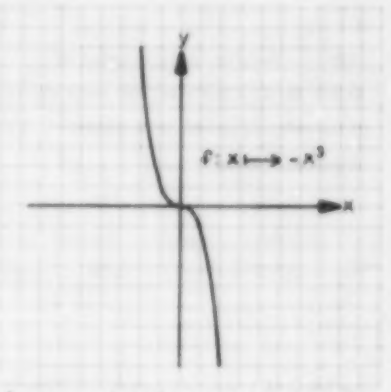
- si $a > 0$ alors f est entièrement positive;
- si $a < 0$ alors f est entièrement négative.



Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.8 DÉTERMINER le signe d'une fonction polynomiale. (Suite)	531 - Pour une fonction de degré trois définie par $f : x \longmapsto ax^3 + bx^2 - cx + d$ où $a \neq 0$, la recherche du signe de cette fonction se fera à l'aide de sa représentation graphique. Soit f la fonction définie par $f : x \longmapsto x^3 - x^2 - 4x + 4$. Graphiquement on a: d'où f est négative pour $]-\infty, -2]$ et pour $[1, 2]$ et f est positive pour $[-2, 1]$ et pour $[2, +\infty$
2.1.9 IDENTIFIER si une fonction est une fonction de variation directe, une fonction identité ou une fonction constante.	- Etant donné une fonction f de la forme $x \longmapsto ax^n$ où $a \neq 0$ et où n est un naturel inférieur à 4, on a les 4 cas suivants: A) si $n = 0$, la fonction f est constante et sa représentation est une droite horizontale. Graphiquement on a: 

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.9 IDENTIFIER si une fonction est une fonction de variation directe, une fonction identité ou une fonction constante. (suite)	B) Si $n \neq 0$, la fonction f est dite fonction de variation directe. De plus: 1°) si $n = 1$, la fonction f est une droite oblique passant par l'origine.  <u>cas particulier</u>: si en plus $a = 1$, la fonction f est alors appelée fonction identité et sa représentation graphique est la bissectrice des 1er et 3e quadrants.  2°) si $n = 2$, la fonction f est une parabole dont le sommet est à l'origine. 

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.9 IDENTIFIER si une fonction est une fonction de variation directe, une fonction identité ou une fonction constante. (suite)	531 3°) si n = 3, la fonction f est une courbe dont l'unique zéro a comme valeur 0.
2.1.10 TROUVER l'équation de la fonction du second degré connaissant ses zéros et les coordonnées du sommet de la parabole associée.	- Étant donné une fonction du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$, on sait que les zéros de f sont: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. La somme S de ces zéros est: $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{a}$ et leur produit P est $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{c}{a}$ d'où $y = ax^2 + bx + c$ devient: $y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$ et $y = a(x^2 - Sx + P)$. Puisque les zéros x_1 et x_2 sont donnés ainsi que les coordonnées du sommet, il s'agit maintenant de remplacer S et P par la somme et le produit des zéros et de substituer les coordonnées du sommet pour obtenir la valeur de a et ainsi trouver l'équation de la fonction donnée.



Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.10 TROUVER l'équation de la fonction du second degré, connaissant ses zéros et les coordonnées du sommet de la parabole associée. (suite)	**Exemple 1:** Soit la fonction du second degré f dont les zéros sont $x_1 = -4$ et $x_2 = 2$ et dont les coordonnées du sommet de la parabole associée sont $(-1, -9)$; trouver l'équation de f. On a: $y = a(x^2 - Sx + P)$ où $y = f(x)$. En calculant S et P, on a: $S = -4 + 2 = -2$ $P = -4 \cdot 2 = -8$. En substituant ces valeurs et celles du sommet, on a: $-9 = a((-1)^2 - (-2 \cdot -1) + (-8))$ $-9 = a(1 - 2 - 8)$ $-9 = -9a$ $1 = a$ d'où $y = 1(x^2 + 2x - 8)$ $y = x^2 + 2x - 8$. **Exemple 2:** Trouver l'équation de la fonction du second degré f, sachant que ses zéros sont $x_1 = 3$ et $x_2 = -\frac{2}{3}$ et que les coordonnées du sommet de la parabole associée sont $\left(\frac{7}{6}, -\frac{121}{12}\right)$. On a: $y = a(x^2 - Sx + P)$, où $y = f(x)$. En calculant S et P on a: $S = \frac{7}{3}$ et $P = -2$. En substituant ces valeurs et celles du sommet, on a: $-\frac{121}{12} = a\left(\left(\frac{7}{6}\right)^2 - \left(\frac{7}{3} \cdot \frac{7}{6}\right) + (-2)\right)$ $-\frac{121}{12} = a\left(\frac{49}{36} - \frac{49}{18} - 2\right)$ $-\frac{121}{12} = a\left(-\frac{121}{36}\right)$ $3 = a$

Objectifs intermédiaires

2.1.10

TROUVER l'équation de la fonction du second degré, connaissant ses zéros et les coordonnées du sommet de la parabole associée. (suite)

2.1.11 [531]

Deux fonctions polynomiales f(x) et g(x) étant données, TRACER le graphique cartésien de f(x) + g(x), de f(x) - g(x), de f(x) · g(x), de f(x) : g(x) ou de g(f(x)).

Commentaires

d'où $y = 3(x^2 - \frac{7}{3}x - 2)$

$y = 3x^2 - 7x - 6$.

N.B.: Une erreur d'écriture s'étant glissée dans l'énoncé de cet objectif, il faudrait plutôt l'écrire comme suit: "Deux fonctions polynomiales f et g étant données, TRACER le graphique cartésien de f + g, de f - g, de f · g et de f : g.

Quant au graphique de g(f(x)), le reporter à l'objectif suivant 2.1.12.

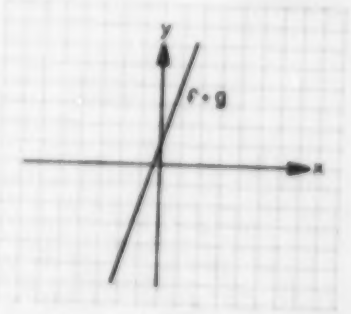
Exemple 1: Tracer le graphique cartésien de la fonction somme f + g des fonctions f et g définies par $f : x \longmapsto x + 2$ et $g : x \longmapsto 2x - 1$.

Le fonction f + g s'obtient en calculant f(x) + g(x),

donc $(x + 2) + (2x - 1) = 3x + 1$,

d'où f + g est définie par $x \longmapsto 3x + 1$,

et graphiquement on obtient:



Objectifs intermédiaires

2.1.11

Deux fonctions polynomiales f(x) et g(x) étant données, TRACER le graphique cartésien de f(x) + g(x), de f(x) - g(x), de f(x) · g(x), de f(x) : g(x) ou de g(f(x)).

(suite)

2.1.12

TROUVER la composée de deux fonctions polynomiales.

Commentaires

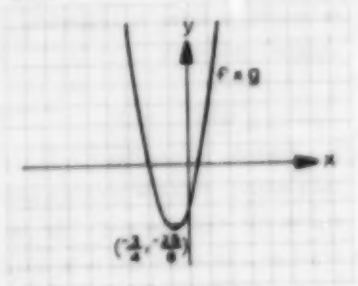
Exemple 2: Tracer le graphique cartésien de la fonction produit f · g des fonctions f et g définies par $f : x \longmapsto x + 2$ et $g : x \longmapsto 2x - 1$.

La fonction f · g s'obtient en calculant f(x) · g(x),

donc $(x + 2) \cdot (2x - 1) = 2x^2 + 3x - 2$,

d'où f · g est définie par $x \longmapsto 2x^2 + 3x - 2$,

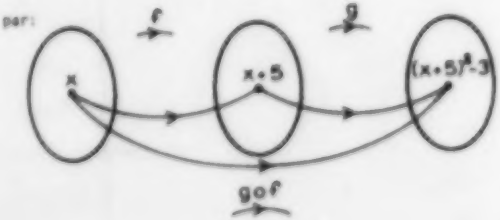
et graphiquement on obtient:



- Afin de visualiser et de comprendre l'effet de la composée de deux fonctions, utiliser la représentation par graphiques sagittaux.

Exemple: Trouver la composée g ∘ f, sachant que les fonctions f et g sont définies par $f : x \longmapsto x + 5$ et $g : x \longmapsto x^2 - 3$.

La composée g ∘ f se représente par:

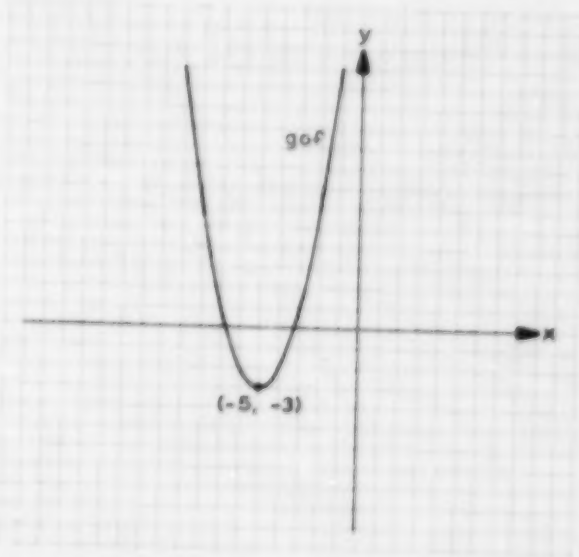


N.B.: g ∘ f se lit: f suivie de g

et se calcule par:

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= g(x + 5)$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.12 TROUVER la composée de deux fonctions polynomiales. (suite)	$(g \circ f)(x) = (x + 5)^2 - 3$ $= x^2 + 10x + 25 - 3$ $= x^2 + 10x + 22,$ d'où $g \circ f : x \longmapsto x^2 + 10x + 22.$ Le graphique cartésien de la fonction composée (pour faire suite à l'objectif 2.1.11) est alors: 

OBJECTIF TERMINAL N° : 2.2 RÉSOUDRE des problèmes se traduisant par une fonction réelle.

Cet objectif terminal permettra également à l'élève d'approfondir la notion de fonction. L'étude des diverses fonctions particulières suivantes: - valeur absolue,
- partie entière (non supérieure ou égale à),
- rationnelle (facultatif),
- variation inverse,
- racine carrée,
- demi-cercle (facultatif),
- demi-ellipse (facultatif)

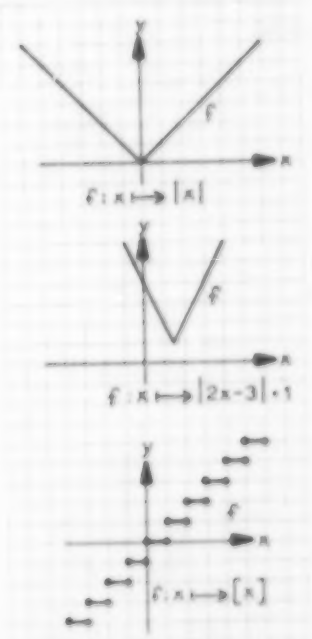
se limitera à faire visualiser ces fonctions, afin que l'élève ait une idée de l'allure des courbes. On ne doit pas s'attarder à faire une étude en profondeur de chacune des fonctions.

Par cette étude, l'élève devra être en mesure:

- de tracer le graphique cartésien de chacune de ces fonctions;
- d'identifier chacune de ces fonctions à partir des représentations graphiques et d'en trouver certains éléments.

N.B.: Les objectifs intermédiaires 2.2.6 et 2.2.7 sont facultatifs.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.1 TRACER le graphique cartésien d'une fonction valeur absolue, d'une fonction partie entière, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.	- Pour toutes ces fonctions, la technique du tracé point par point est à conseiller lors d'une première exploration. Faire remarquer que: - la recherche des zéros de la fonction peut confirmer la précision du graphique. - l'ajout d'une constante à l'intérieur ou à l'extérieur du symbole de certaines fonctions telles que valeur absolue, partie entière et racine carrée fait translater horizontalement ou verticalement le tracé de la fonction. Exemple 1: Tracer le graphique cartésien de la fonction valeur absolue f définie par $f : x \longmapsto |x|$. On a le graphique suivant: Exemple 2: Tracer le graphique cartésien de la fonction f définie par $f : x \longmapsto |2x - 3| + 1$. On a le graphique suivant: Exemple 3: Tracer le graphique cartésien de la fonction f définie par $f : x \longmapsto [x]$. On a le graphique suivant:



Objectifs intermédiaires

2.2.1

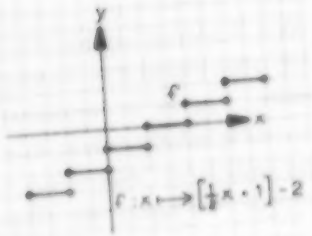
TRACER le graphique cartésien d'une fonction valeur absolue, d'une fonction partie entière, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.

(suite)

Commentaires

Exemple 4: Tracer le graphique cartésien de la fonction f définie par $f : x \longmapsto \left[\frac{1}{2}x + 1\right] - 2$.

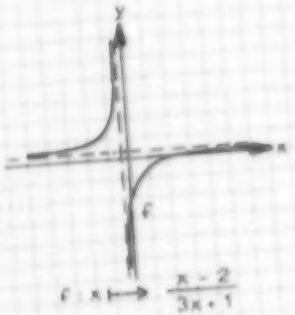
On a le graphique suivant:



Exemple 5: Tracer le graphique cartésien de la fonction f définie par $f : x \longmapsto \frac{x-2}{3x+1}$.

531

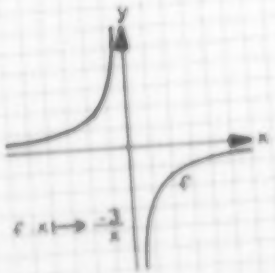
On a le graphique suivant:



N.B.: Pour la fonction rationnelle, on se limite au quotient d'un polynôme de degré non supérieur à 1, par un polynôme de degré 1, c'est-à-dire de la forme $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, où $cx + d \neq 0$ et $c \neq 0$.

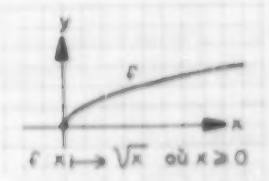
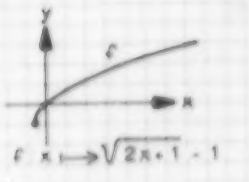
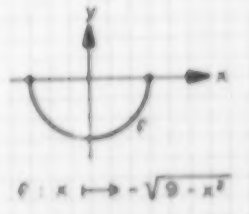
Exemple 6: Tracer le grapnique cartésien de la fonction f définie par $f : x \longmapsto \frac{-3}{x}$.

On a le graphique suivant:



N.B.: - La fonction de variation inverse se limite ici à la fonction du type $x \longmapsto \frac{k}{x}$ où $x \neq 0$.

- La fonction de variation inverse est un cas particulier de la fonction rationnelle $\frac{ax+b}{cx+d}$, dans laquelle $a = 0$ et $d = 0$.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.1 TRACER le graphique cartésien d'une fonction valeur absolue, d'une fonction partie entière, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse. (suite)	Exemple 7: Tracer le graphique cartésien de la fonction f définie par $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ où $x \geq 0$. On a le graphique suivant: 
	Exemple 8: Tracer le graphique cartésien de la fonction f définie par $f : x \longmapsto \sqrt{2x+1} - 1$. On a le graphique suivant: 
	Exemple 9: Tracer le graphique cartésien de la fonction 531 f définie par $f : x \longmapsto \sqrt{4 - x^2}$. On a le graphique suivant:
	Exemple 10: Tracer le graphique cartésien de la fonction 531 f définie par $f : x \longmapsto -\sqrt{9 - x^2}$. On a le graphique suivant: 

Objectifs intermédiaires

2.2.1

TRACER le graphique cartésien d'une fonction valeur absolue, d'une fonction partie entière, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.

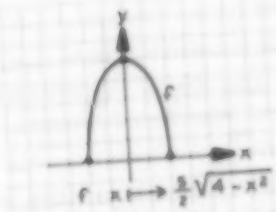
(suite)

Commentaires

Exemple 11: Tracer le graphique cartésien de la fonction f définie par $f : x \longmapsto \frac{5}{2}\sqrt{4 - x^2}$.

531

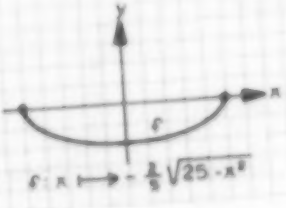
On a le graphique suivant:



Exemple 12: Tracer le graphique cartésien de la fonction f définie par $f : x \longmapsto -\frac{2}{5}\sqrt{25 - x^2}$.

531

On a le graphique suivant:



Objectifs intermédiaires

2.2.2

TROUVER le domaine et l'image d'une fonction valeur absolue, d'une fonction partie entière, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.

Commentaires

- Rappeler au besoin la définition du domaine et de l'image d'une fonction. Voir 4.1.3 de l'option I.

- La recherche du domaine et de l'image des fonctions considérées à l'objectif précédent se fait à partir du tracé graphique desdites fonctions.

Ce tableau renvoie aux graphiques des exemples de l'objectif précédent.

EXEMPLE	DOMAINE	IMAGE
1	$\mathbb{R}$	$[0, +\infty[$
2	$\mathbb{R}$	$[1, +\infty[$
3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$
4	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$
5	$\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$
6	$\mathbb{R}_+^*$ ou $]0, +\infty[$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $]-\infty, 0[$
7	$\mathbb{R}_+$ ou $[0, +\infty[$	$\mathbb{R}_-$ ou $]-\infty, 0]$
8	$\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$	$[-1, +\infty[$
9	$[-2, 2]$	$[0, 2]$
10	$[-3, 3]$	$[-3, 0]$
11	$[-2, 2]$	$[0, 5]$
12	$[-5, 5]$	$[-2, 0]$

Objectifs intermédiaires

2.2.3

DÉTERMINER le maximum ou le minimum d'une fonction valeur absolue, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.

Commentaires

- Rappeler au besoin les notions de maximum et de minimum, telles que vues à l'objectif 2.1.3 de l'option II.

- Le tracé graphique de ces fonctions permettra à l'élève de déterminer la valeur du maximum ou du minimum.

Dans le tableau ci-dessous, on se réfère aux graphiques des exemples de l'objectif 2.2.1.

EXEMPLE	MAXIMUM ou MINIMUM	COMMENTAIRES
1	minimum = 0	ce sera un maximum si on a $x \longmapsto -|x|$, c'est-à-dire si l'ouverture est vers le bas.
2	minimum = 1	ici la fonction valeur absolue se définit par $x \longmapsto |ax + b| + c$ où c est un terme qui indique une translation verticale du graphique original de la fonction $x \longmapsto |ax + b|$; il indique alors le minimum ou le maximum de la fonction.
7	minimum = 0	ici ce sera un maximum si la fonction est du type $x \longmapsto -\sqrt{x}$ où $x \geq 0$.
8	minimum = -1	la fonction racine carrée translatée étant définie par $x \longmapsto \sqrt{ax + b} + c$, le terme c indique ici le minimum ou le maximum.
9	min = 0 et max = 2	les fonctions demi-cercle étant définies par $x \longmapsto +\sqrt{r^2 - x^2}$ et par $x \longmapsto -\sqrt{r^2 - x^2}$ où r est le rayon du cercle centré à l'origine. si on a la fonction $x \longmapsto \sqrt{r^2 - x^2}$, le minimum sera 0 et le maximum sera r;
10	min = -3 et max = 0	si on a la fonction $x \longmapsto -\sqrt{r^2 - x^2}$, le minimum sera -r et le maximum sera 0.
11	min = 0 et max = 5	les fonctions demi-ellipse étant définies par $x \longmapsto +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ et par $x \longmapsto -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (non translatées) où a est le demi-axe horizontal et b est le demi-axe vertical de l'ellipse centrée à l'origine. si on a la fonction $x \longmapsto \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, le minimum sera 0 et le maximum sera b;
12	min = -2 et max = 0	si on a la fonction $x \longmapsto -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, le minimum sera -b et le maximum sera 0.

Objectifs intermédiaires

2.2.4

DÉTERMINER la croissance ou la décroissance, dans un intervalle donné, d'une fonction valeur absolue, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-parabole, d'une fonction demi-ellipse.

Commentaires

- Rappeler au besoin les notions de croissance ou de décroissance, telles que vues à l'objectif 2.1.6 de l'option II.

- Le tracé graphique de ces fonctions permettra à l'élève de déterminer les intervalles de croissance et de décroissance. Dans le tableau ci-dessous, on se réfère aux graphiques des exemples de l'objectif 2.2.1.

EXEMPLE	INTERVALLE DE CROISSANCE	INTERVALLE DE DÉCROISSANCE	COMMENTAIRES
1 2	$[0, +\infty[$ $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$	$]-\infty, 0]$ $]-\infty, \frac{3}{2}\right]$	ces intervalles de croissance et de décroissance seront "inversés" si les graphiques des fonctions sont ouverts vers le bas.
5	$]-\infty, -\frac{1}{3}[$ et $]\frac{1}{3}, +\infty[$	aucun	la fonction étant définie par $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ où $cx+d \neq 0$, c'est la valeur de $-\frac{d}{c}$ qui indique la borne des intervalles; ces derniers seront des intervalles de croissance si le graphique est tracé dans les quadrants II et IV et seront des intervalles de décroissance si le graphique est tracé dans les quadrants I et III.
6	$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty$	aucun	la fonction étant définie par $x \longmapsto \frac{k}{x}$ (où $x \neq 0$), les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty$ seront des intervalles de croissance si le tracé de la fonction se fait dans les 2^{e} et 4^{e} quadrants tandis que ce seront des intervalles de décroissance si le graphique de la fonction occupe les 1er et 3^{e} quadrants.

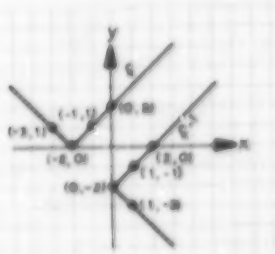
Objectifs intermédiaires

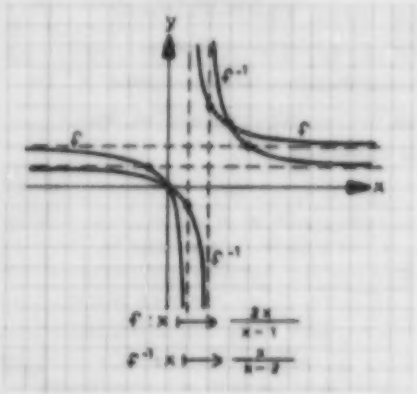
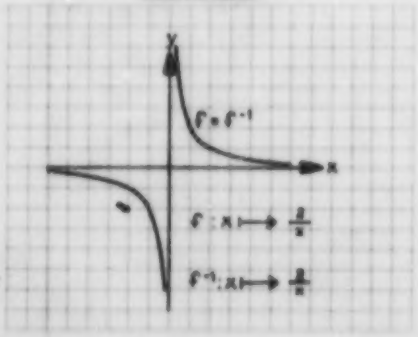
2.2.4

DÉTERMINER la croissance ou la décroissance, dans un intervalle donné, d'une fonction valeur absolue, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle, d'une fonction demi-ellipse. (suite)

Commentaires

EXEMPLE	INTERVALLE DE CROISSANCE	INTERVALLE DE DÉCROISSANCE	COMMENTAIRES
7	$[0, +\infty[$	aucun	ces fonctions racine carrée étant définies par $x \longmapsto \pm\sqrt{ax + b} + c$, l'intervalle $\left[-\frac{b}{a}, +\infty\right[$ en sera un de croissance si la fonction est définie par $x \longmapsto \sqrt{ax + b}$; pour le cas où $x \longmapsto -\sqrt{ax + b}$, l'intervalle sera un intervalle de décroissance.
8	$[-\frac{1}{2}, +\infty[$	aucun	
9	$[-2, 0]$	$[0, 2]$	comme les fonctions demi-cercles provenant d'un cercle centré à l'origine et qu'elles sont définies par $x \longmapsto \sqrt{r^2 - x^2}$, l'intervalle $[-r, 0]$ en sera un de croissance et l'intervalle $[0, r]$ en sera un de décroissance pour la fonction $x \longmapsto \sqrt{r^2 - x^2}$ tandis que l'intervalle $[-r, 0]$ en sera un de décroissance et l'intervalle $[0, r]$ en sera un de croissance pour la fonction $x \longmapsto -\sqrt{r^2 - x^2}$.
10	$[0, 3]$	$[-3, 0]$	
11	$[-2, 0]$	$[0, 2]$	comme les fonctions demi-ellipse provenant d'une ellipse centrée à l'origine et qu'elles sont définies par $x \longmapsto \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, l'intervalle $[-a, 0]$ en est un de croissance et l'intervalle $[0, +]$ en est un de décroissance pour la fonction $x \longmapsto \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ tandis que l'intervalle $[-a, 0]$ en est un de décroissance et l'intervalle $[0, a]$ en est un de croissance pour la fonction $x \longmapsto -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.
12	$[0, 5]$	$[-5, 0]$	

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.5 TROUVER la réciproque d'une fonction valeur absolue, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse.	- Rappeler au besoin la notion de réciproque d'une fonction, telle que définie à l'objectif 4.1.6 de l'option I et telle que reprise à l'objectif 2.1.6 de l'option II. Exemple 1 : Trouver la réciproque de la fonction valeur absolue $f : x \longmapsto |x + 2|$. Algébriquement À partir de l'équation de f, on remplace x par y et y par x et ensuite on isole y pour obtenir l'équation de la réciproque (f^{-1}). $y = |x + 2|$ $x = |y + 2|$ d'où : $y + 2 = x$ i.e. $y = x - 2$ ou $y + 2 = -x$ i.e. $y = -x - 2$ où $x \geq 0$ Graphiquement À partir de quelques couples de f, on trouve les couples réciproques pour tracer f^{-1}.  On remarque que f^{-1} n'est pas une fonction. Les graphiques de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la bissectrice des 1er et 3e quadrants.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.5 TROUVER la réciproque d'une fonction valeur absolue, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse. (suite)	Exemple 2: Trouver la réciproque de la fonction rationnelle $f : x \longmapsto \frac{2x}{x-1}$. Algébriquement $y = \frac{2x}{x-1}$ d'où $x = \frac{2y}{y-1}$ $2y = xy - x$ $2y - xy = -x$ $y(2-x) = -x$ $y = \frac{x}{x-2}$ Graphiquement  Exemple 3: Trouver la réciproque de la fonction de variation inverse $f : x \longmapsto \frac{2}{x}$. Algébriquement $y = \frac{2}{x}$ d'où $x = \frac{2}{y}$ $xy = 2$ $y = \frac{2}{x}$ Graphiquement 

Objectifs intermédiaires

2.2.5

TROUVER la réciproque d'une fonction valeur absolue, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle ou d'une fonction demi-ellipse. (suite)

Commentaires

Exemple 4: Trouver la réciproque de la fonction racine carrée $f : x \longmapsto \sqrt{x+4}$.

Algébriquement

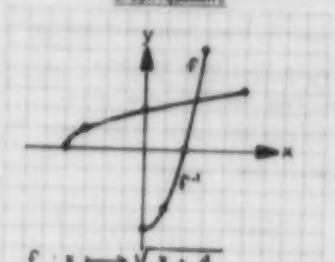
$$y = \sqrt{x+4}$$

d'où $x = \sqrt{y+4}$

$$x^2 = y + 4$$

$$x^2 - 4 = y \quad \text{où } x \geq 0$$

Graphiquement



$f : x \longmapsto \sqrt{x+4}$

$f^{-1} : x \longmapsto x^2 - 4$ où $x \geq 0$

Exemple 5: Trouver la réciproque de la fonction demi-cercle définie par $f : x \longmapsto \sqrt{4 - x^2}$.

Algébriquement

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

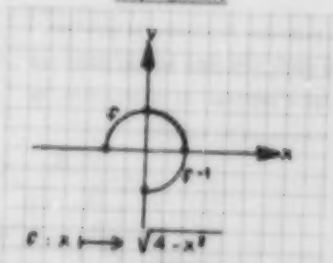
d'où $x = \sqrt{4 - y^2}$

$$x^2 = 4 - y^2$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

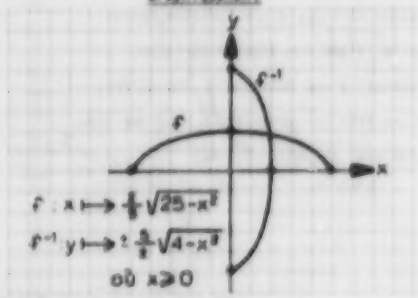
$$y = \pm\sqrt{4 - x^2} \quad \text{où } x \geq 0$$

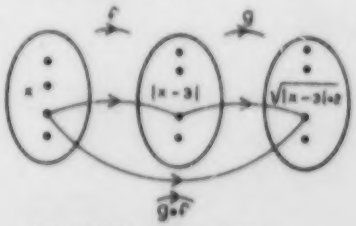
Graphiquement



$f : x \longmapsto \sqrt{4 - x^2}$

$f^{-1} : x \longmapsto \pm\sqrt{4 - x^2}$ où $x \geq 0$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.5 TROUVER la réciproque d'une fonction valeur absolue, d'une fonction rationnelle, d'une fonction de variation inverse, d'une fonction racine carrée, d'une fonction demi-cercle, d'une fonction demi-ellipse. (suite)	Exemple 6: Trouver la réciproque de la fonction demi-ellipse définie par $f : x \longmapsto \frac{2}{5}\sqrt{25 - x^2}$. Algébriquement $y = \frac{2}{5}\sqrt{25 - x^2}$ d'où $x = \frac{2}{5}\sqrt{25 - y^2}$ $x^2 = \frac{4}{25}(25 - y^2)$ $y^2 = \frac{100 - 25x^2}{4}$ $y^2 = \frac{25}{4}(4 - x^2)$ $y = \pm\frac{5}{2}\sqrt{4 - x^2}$ Graphiquement  d'où f^{-1} n'est pas une fonction
2.2.6 Deux ou plusieurs fonctions rationnelles étant données, EFFECTUER sur celles-ci les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication ou de division.	- Dans cet objectif, on se limite aux fonctions rationnelles dont les polynômes sont de degré inférieur à deux, c'est-à-dire définies par: $f : x \longmapsto \frac{ax + b}{cx + d}$ où $cx + d \neq 0$. De plus, l'objectif se limite à trouver la fonction résultante de l'opération concernée. Exemple: Trouver la fonction $f \circ g$ si les fonctions f et g sont définies respectivement par: $f : x \longmapsto \frac{x + 3}{2x - 5}$ et $g : x \longmapsto \frac{3}{x}$. La fonction $f \circ g$ sera définie par $x \longmapsto \frac{x + 3}{2x - 5} \circ \frac{3}{x}$, c'est-à-dire: $f \circ g : x \longmapsto \frac{x^2 + 9x - 15}{x(2x - 5)}$.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.7 Deux ou plusieurs fonctions racines carrées étant données, EFFECTUER sur celles-ci les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication ou de division.	- Dans cet objectif, on se limite aux fonctions racine carrée dont le radicande est un polynôme de degré inférieur à deux, c'est-à-dire définies par $f : x \longmapsto \sqrt{ax + b}$. De plus, l'objectif se limite à trouver la fonction résultante de l'opération concernée. Exemple: Trouver la fonction $f \cdot g$ si les fonctions f et g sont définies respectivement par $f : x \longmapsto \sqrt{2x + 3}$ $g : x \longmapsto \sqrt{5x}$ $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $= \sqrt{2x + 3} \cdot \sqrt{5x}$ $= \sqrt{10x^2 + 15x}$ d'où $f \cdot g : x \longmapsto \sqrt{10x^2 + 15x}$
2.2.8 TROUVER la composée de fonctions réelles.	- Rappeler au besoin la notion de composée de fonctions. L'objectif 2.1.12 de l'option II a mis l'élève en contact avec cette notion, lors de l'étude des fonctions polynomiales. Exemple: Trouver la composée $g \circ f$ (f suivie de g) si les fonctions f et g sont définies respectivement par: $f : x \longmapsto |x - 3|$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x + 2}$ Graphiquement on a:  i.e. $g(f(x)) = \sqrt{|x - 3| + 2}$ d'où: $g \circ f : x \longmapsto \sqrt{|x - 3| + 2}$

OBJECTIF TERMINAL N°: 2.3 RÉSOUDRE DES PROBLÈMES SE TRADUISANT PAR DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

La trigonométrie est une branche importante de la mathématique et, en raison de sa situation privilégiée de préalable dans la poursuite d'études plus poussées en mathématique, en sciences et dans le domaine de la technique, il faudrait lui accorder une grande importance. Cette importance est double puisqu'on y aborde un aspect géométrique et un aspect fonctionnel qui permettent d'établir des liens entre la géométrie et les nombres réels.

Profiter de l'étude de ces fonctions pour présenter des situations de mathématique appliquée (voir à ce propos les situations d'apprentissage suggérées dans la première partie de ce guide). On trouve de nombreuses applications qui comportent la composition de fonctions trigonométriques et qui nécessitent la compréhension de notions telles que l'amplitude, la période, la fréquence et le déphasage.

L'interprétation graphique et la capacité de transformer et d'évaluer correctement des expressions trigonométriques sont d'une grande importance pour interpréter les diverses applications. En conséquence, on devra porter une attention particulière à l'objectif 2.3.14.

L'ordinateur et surtout la calculatrice scientifique sont des outils indispensables pour une étude approfondie des fonctions trigonométriques. Concernant la calculatrice, il faudra, au moment opportun, montrer à l'élève comment l'utiliser efficacement. Voici d'ailleurs quelques pistes d'exploitation:

- Montrer les différents modes que l'on peut utiliser: degré, radian, grade.
- Montrer comment changer des minutes en degrés.

  Exemple: 37°15' devient:

  [3] [7] [.] [1] [5] [÷] [6] [0] [=] → 37.25

- Montrer comment évaluer une fonction trigonométrique.

  Exemple: Évaluer sin 34°

  [3] [4] [sin] → 0.5591929

Exemple: Évaluer cot 9°40'

9	.	4	0	'	6	0	"	2nd	D/S	5.8708042

- La valeur d'une fonction trigonométrique étant donnée, montrer comment trouver la mesure de l'angle correspondant.

Exemple: Sachant que cos A = 0,42, quelle est la mesure de l'angle A?

.	4	2	2	6	2nd	cos	65.001154

Exemple: Sachant que csc B = 3,179, quelle est la mesure de l'angle B?

3	.	1	7	9	D/S	2nd	sin	18.334515

Pour changer 0,334515 heure en minutes, il faut multiplier par 60 et arrondir à la minute près.

.	3	3	4	5	1	5	×	6	0	=	20.0709

Ainsi l'angle B = 18°20'.

- Montrer comment utiliser le mode "rad" (radian) pour évaluer des fonctions trigonométriques.

Exemple: Évaluer tan 1,3526.

1	.	3	5	2	6	2nd	4.5100646 rad

Exemple: Évaluer cos $\frac{\pi}{3}$

π	÷	3	=	cos	0.5 rad

- Montrer comment évaluer la mesure de l'angle en degrés ou en radians quand la valeur de la fonction de cet angle est connue.

Exemple: Évaluer en degrés arc tan 1.

1	2nd	2nd	45.

Exemple: Évaluer en radians arc sin $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3 √ 1 2 ÷ 2nd sin → 1.0471976 rad

Exemple: Évaluer sin (arc cos $\frac{1}{2}$)

1 ÷ 2 ÷ 2nd cos sin → 0.8660254

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.3.1 TRANSFORMER des degrés en radians et vice versa.	- Faire un rappel des notions d'angles de rotation (horaire, anti-horaire) et d'angles au centre. - Étant donné que l'étude des fonctions trigonométriques est définie à partir de la fonction d'enroulement, qui elle-même fait appel à la notion de longueur de circonférence, faire observer la relation directe qui lie cette longueur et la mesure de l'angle au centre associée. $\frac{\text{longueur } \overset{\frown}{AB}}{2\pi r} = \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$ - Définir le radian et établir la relation qui existe entre cette unité de mesure et le degré. Remarque: Un radian est la mesure de l'angle au centre qui soustend un arc de cercle dont la longueur est égale au rayon. Étant donné que la circonférence d'un cercle est $2\pi r$, on a donc 2π radians dans un cercle. Pour toute mesure d'angle exprimée en degrés, il est possible d'obtenir l'équivalent en radians et vice versa. Il suffit de retenir que le rapport des degrés est égal au rapport des radians. $\frac{\theta^\circ}{360^\circ} = \frac{\theta \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}}$ $\frac{\theta^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta \text{ rad}}{\pi \text{ rad}}$ - ENRICHISSEMENT On pourrait profiter de l'occasion pour approfondir les quatre opérations en utilisant les degrés, les minutes et les secondes.

Objectifs intermédiaires

2.3.2

DÉTERMINER la relation entre la mesure d'un angle et celle de l'arc ou des arcs interceptés par cet angle.

Commentaires

- Montrer que lorsque l'angle au centre est exprimé en radians, on peut déduire une formule simple qui relie l'angle au centre, le rayon et la mesure de l'arc.

Soit: s = longueur $\overset{\frown}{AB}$

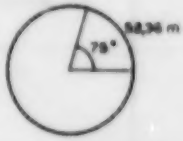
$\overline{OA} = \overline{OB} = r$

Alors: $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{s}{2\pi r}$

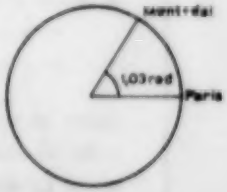
D'où: $\boxed{s = r\theta}$

- Faire résoudre des problèmes utilisant les notions précédentes.

  - Une biche est attachée à un poteau au moyen d'une corde. Lorsque la corde est bien tendue, la biche à l'extrémité de la corde parcourt 52,36 m et l'angle engendré par son déplacement est de 75°. Quelle est la longueur de la corde?

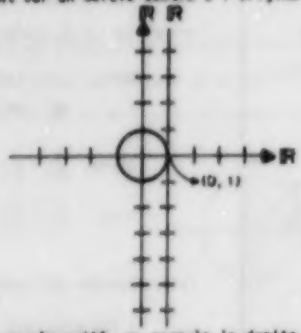


  - Détermine le rayon terrestre si la distance séparant Montréal de Paris est de 6578 km et si l'angle au centre de la terre est de 1,03 rad.



  - etc.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.3.3 DÉFINIR la fonction d'enroulement sur un cercle centré à l'origine et de rayon un.	- Explorer les effets d'enroulement sur un cercle centré à l'origine et de rayon un.



À partir du point (1, 0) sur le cercle-unité, on enroule la droite des réels sur le cercle de façon à définir la fonction d'enroulement f.

Par définition,

1) $f(0) = (1, 0)$ ou $f: 0 \longmapsto (1, 0)$;
2) si $r \in \mathbb{R}_+$, $f(r)$ est le point du cercle obtenu à r unités en enroulant $\mathbb{R}$ sur le cercle à partir du point (1, 0), dans le sens anti-horaire;
3) si $r \in \mathbb{R}_-$, $f(r)$ est le point du cercle obtenu à r unités en enroulant $\mathbb{R}$ sur le cercle à partir du point (1, 0), dans le sens horaire.

La fonction d'enroulement f est donc une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

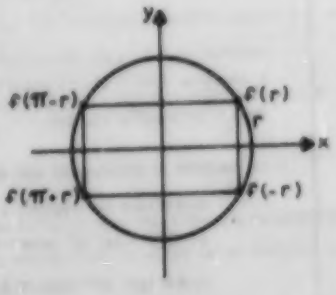
$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

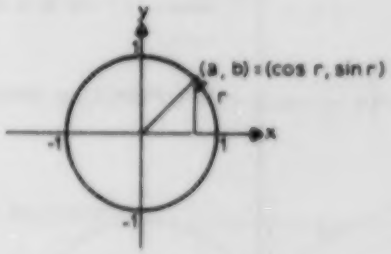
$f: r \longmapsto (a, b)$

- Établir les classes d'équivalence pour des éléments caractéristiques atteints par plus d'un enroulement ou par des enroulements; aborder par ce biais la périodicité en faisant constater qu'après un tour, on revient aux mêmes valeurs.

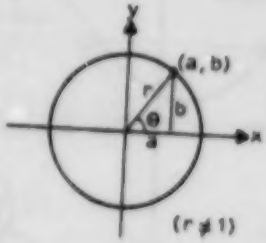
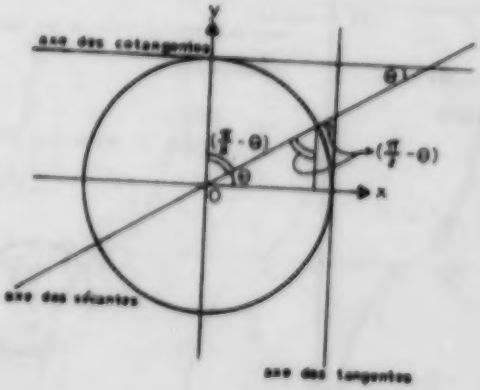
Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.3.3 DÉFINIR la fonction d'enroulement sur un cercle centré à l'origine et de rayon un. (suite)	Puisque la circonférence du cercle-unité est 2π, la fonction f est périodique, de période 2π (c'est-à-dire la période minimale est 2π). Si $0 \leq r < 2\pi$, on a: $f(r + 2\pi n) = f(r)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ Remarque: On aurait avantage à considérer les valeurs de f pour des nombres de la forme $n\pi$, où $n \in \mathbb{N}$. - Il s'avère important ici de faire calculer f(r) où r est un multiple de $\pi/4$, de $\pi/3$ ou de $\pi/6$. Remarque: L'équation du cercle-unité ou cercle trigonométrique est: $\boxed{x^2 + y^2 = 1}$ Un point qui appartient au cercle trigonométrique doit nécessairement vérifier cette équation.
2.3.4 TROUVER le domaine et l'image de la fonction d'enroulement.	- Faire trouver le domaine et l'image de la fonction d'enroulement sur le cercle trigonométrique. Domaine de $f = \mathbb{R}$ Image de $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$
2.3.5 DÉTERMINER les propriétés de la fonction d'enroulement.	- L'équation $f(r) = (a, b)$ possède une infinité de solutions de la forme $r_1 + 2\pi n$ où r_1 est une solution dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. - La fonction d'enroulement est également: symétrique par rapport à l'axe des x: si $f(r) = (a, b)$ alors $f(-r) = (a, -b)$; symétrique par rapport à l'axe des y: si $f(r) = (a, b)$ alors $f(\pi - r) = (-a, b)$;

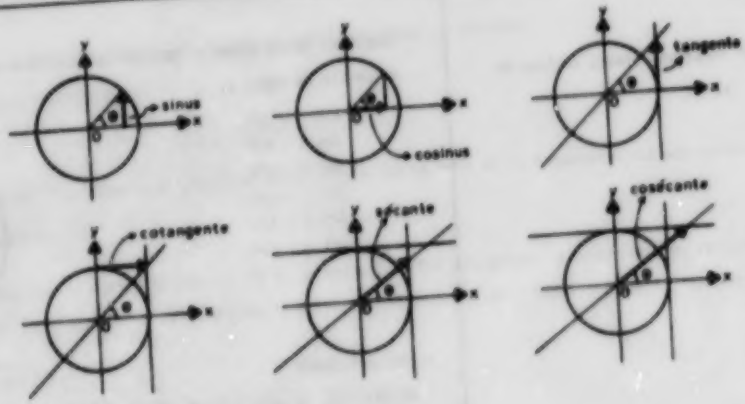
Objectifs intermédiaires	Commentaires
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.3.5 DÉTERMINER les propriétés de la fonction d'enroulement. (suite)	symétrique par rapport à l'origine: si $f(r) = (a, b)$ alors $f(\pi + r) = (-a, -b)$. - En plus, on pourra faire observer que: • si $f(r) = (a, b)$, alors $f(r + \pi/2) = (-b, a)$; • si $f(r) = (a, b)$, alors $f(r + 3\pi/2) = (b, -a)$; • si $f(r) = (a, b)$, alors $f(r + 2\pi) = (a, b)$. - ENRICHISSEMENT En raison de la périodicité de la fonction d'enroulement, il est possible d'avoir les égalités suivantes: • $f(r) = f(r + 2n\pi)$, où $n \in \mathbb{Z}$; • $f(r + \pi/2) = f(r + (\pi + 4n\pi)/2)$, où $n \in \mathbb{Z}$; • $f(r + \pi) = f(r + \pi + 2n\pi)$, où $n \in \mathbb{Z}$; • $f(r + 3\pi/2) = f(r + (3\pi + 4n\pi)/2)$, où $n \in \mathbb{Z}$. Remarque: L'utilisation de transparents à acétate pourrait aider à visualiser les propriétés sur le cercle trigonométrique.  $0 \leq r \leq \frac{\pi}{2}$

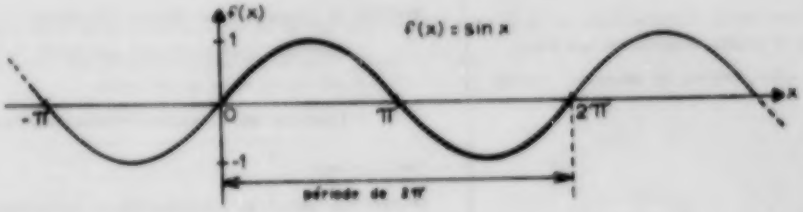
Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.3.6 DÉFINIR les fonctions sinus, cosinus et tangente.	- L'élève de quatrième secondaire a utilisé les rapports trigonométriques dans le triangle rectangle (objectif terminal 2.4). Il serait utile d'en faire un rappel. - Définir les fonctions trigonométriques sinus et cosinus à partir de la fonction d'enroulement f sur le cercle trigonométrique. $\forall r \in \mathbb{R}$, $f(r) = (a, b)$: cosinus $r = a$ ($\cos r = a$) sinus $r = b$ ($\sin r = b$) Ainsi $f(r) = (\cos r, \sin r)$  Faire remarquer que les fonctions sinus et cosinus sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, leur domaine est $\mathbb{R}$ et leur image est $[-1, 1]$. On sait qu'à tout nombre réel r correspond un point du cercle trigonométrique ayant pour coordonnées f(r). Faire observer que ce point est déterminé également par un angle θ dont la mesure en radians est égale à r. $\sin \theta = \sin r$ $\cos \theta = \cos r$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.3.6 DÉFINIR les fonctions sinus, cosinus et tangente. (suite)	- Définir la fonction tangente à partir des fonctions sinus et cosinus: $\tan : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $r \longmapsto \tan r = \frac{\sin r}{\cos r}$ où $\cos r \neq 0$ Profiter de l'occasion pour spécifier qu'il existe des valeurs où la tangente n'est pas définie ($\frac{\pi}{2} + n\pi$, où $n \in \mathbb{Z}$). - Faire évaluer le sinus, le cosinus et la tangente à partir des points caractéristiques calculés précédemment. À l'aide de la calculatrice, explorer différents cas où l'angle est exprimé en degré ou en radian. - Faire découvrir les signes des différentes fonctions: - Définir les co-fonctions comme étant les inverses des trois fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente: $\sec r = 1/\cos r$ $\csc r = 1/\sin r$ $\cot r = \cos r/\sin r$ Apprendre aux élèves à évaluer ces trois fonctions à l'aide de la calculatrice.

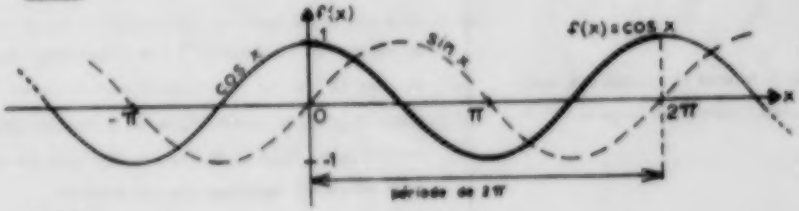
Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.3.6 DÉFINIR les fonctions sinus, cosinus et tangente. (suite)	- Compléter cette étude en faisant un parallèle avec l'objectif terminal 2.4 de 4e secondaire en utilisant un cercle de rayon r: $\sin \theta = b/r$ $\cos \theta = a/r$ $\tan \theta = b/a$ $\csc \theta = r/b$ $\sec \theta = r/a$ $\cot \theta = a/b$  - ENRICHISSEMENT Montrer les segments orientés représentant les six fonctions dans les différents quadrants. 

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.3.6 DÉFINIR les fonctions sinus, cosinus et tangente. (suite)	
2.3.7 TRACER le graphique cartésien des fonctions sinus, cosinus et tangente.	- Pour faciliter le tracé de ces courbes, utiliser les points caractéristiques qui ont été calculés précédemment. Sinus On peut ici utiliser le cercle trigonométrique...

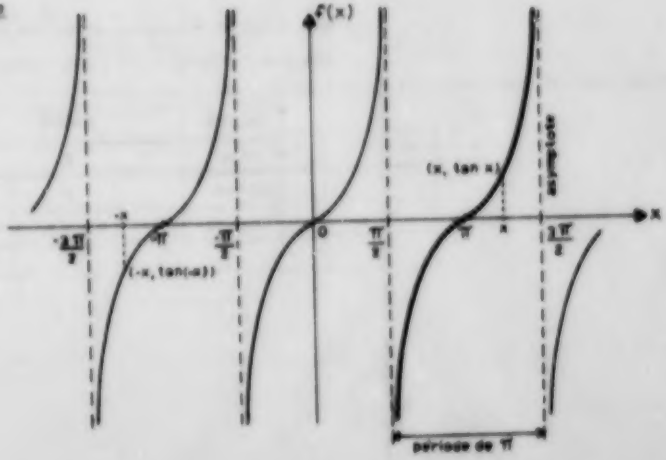
Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.3.7 TRACER le graphique cartésien des fonctions sinus, cosinus et tangente. (suite)	



Cosinus



Tangente



Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.3.7 TRACER le graphique cartésien des fonctions sinus, cosinus et tangente. (suite)	Profiter de l'occasion pour définir "Asymptote". L'asymptote d'une courbe est une droite de laquelle la courbe se rapproche, mais qu'elle n'atteint en aucun de ses points. L'asymptote constitue une limite du graphique d'une relation ou d'une fonction. - ENRICHISSEMENT On pourrait faire tracer les courbes des autres fonctions.
2.3.8 TROUVER le domaine et l'image des fonctions sinus, cosinus et tangente.	- On reprend ici l'objectif 2.3.4 en l'appliquant aux fonctions sinus, cosinus et tangente. On peut utiliser la fonction d'enroulement pour déterminer le domaine et l'image du sinus et du cosinus (voir objectif 2.3.6) et la définition de la fonction tangente pour déterminer son domaine et son image (voir objectif 2.3.6). De plus, en utilisant les graphiques cartésiens (objectif 2.3.7), on pourra faire visualiser davantage tous ces éléments. - Dans le cas de la tangente, porter une attention particulière aux asymptotes verticales. On constatera plus facilement qu'il y a des valeurs où la tangente n'est pas définie.

FONCTION	DOMAINE	IMAGE
sinus	$\mathbb{R}$	$(y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1) = [-1, 1]$
cosinus	$\mathbb{R}$	$(y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1) = [-1, 1]$
tangente	$\mathbb{R} \setminus (x \in \mathbb{R} \mid x = \pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}$

Objectifs intermédiaires

2.3.9

DÉTERMINER le minimum ou le maximum des fonctions sinus et cosinus.

2.3.10

L'une des fonctions sinus, cosinus ou tangente étant donnée, DÉTERMINER si elle est croissante ou décroissante dans un intervalle donné.

Commentaires

- On peut faire cette étude à partir de la fonction d'enroulement ou de la représentation cartésienne des différentes fonctions pour certaines valeurs caractéristiques.

FONCTION	MINIMUM	MAXIMUM
sinus	-1	1
cosinus	-1	1
tangente	aucun	aucun

N.B.: Ne pas s'attarder sur la valeur des points asymptotiques.

- Rappeler au besoin la notion de croissance ou de décroissance:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a \leq b \longrightarrow f(a) \leq f(b)$$

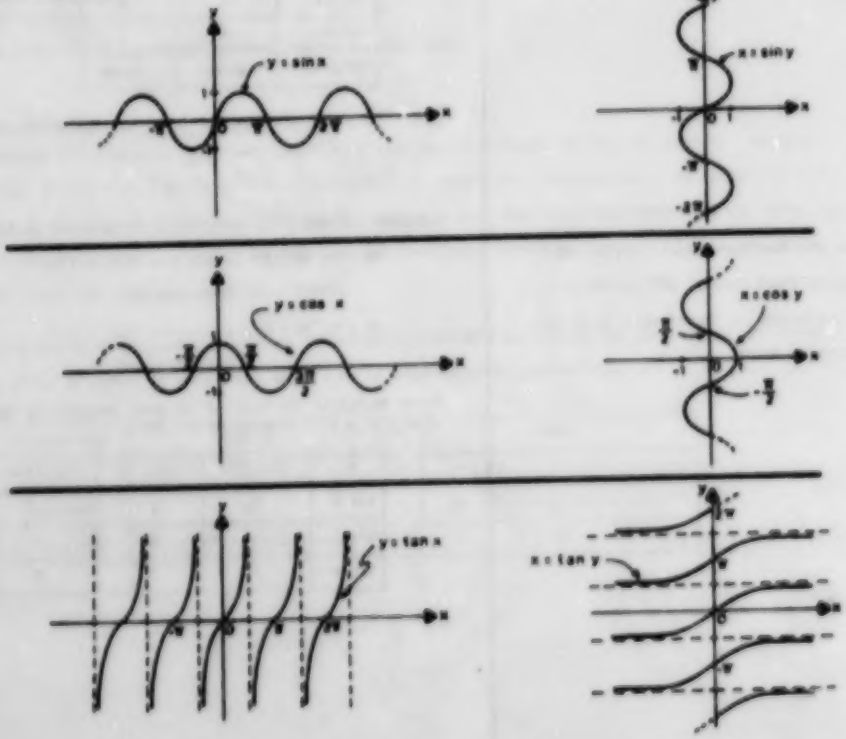
(croissance)

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a \geq b \longrightarrow f(a) \leq f(b)$$

(décroissance)

Faire découvrir les intervalles dans lesquels la fonction est soit croissante (↗), soit décroissante (↘) dans l'intervalle $[0, 2\pi[$:

θ	$[0, \pi/2[$	$]\pi/2, \pi[$	$]\pi, 3\pi/2[$	$]3\pi/2, 2\pi[$
$\sin \theta$	↗	↘	↘	↗
$\cos \theta$	↘	↘	↗	↗
$\tan \theta$	↗	↗	↗	↗

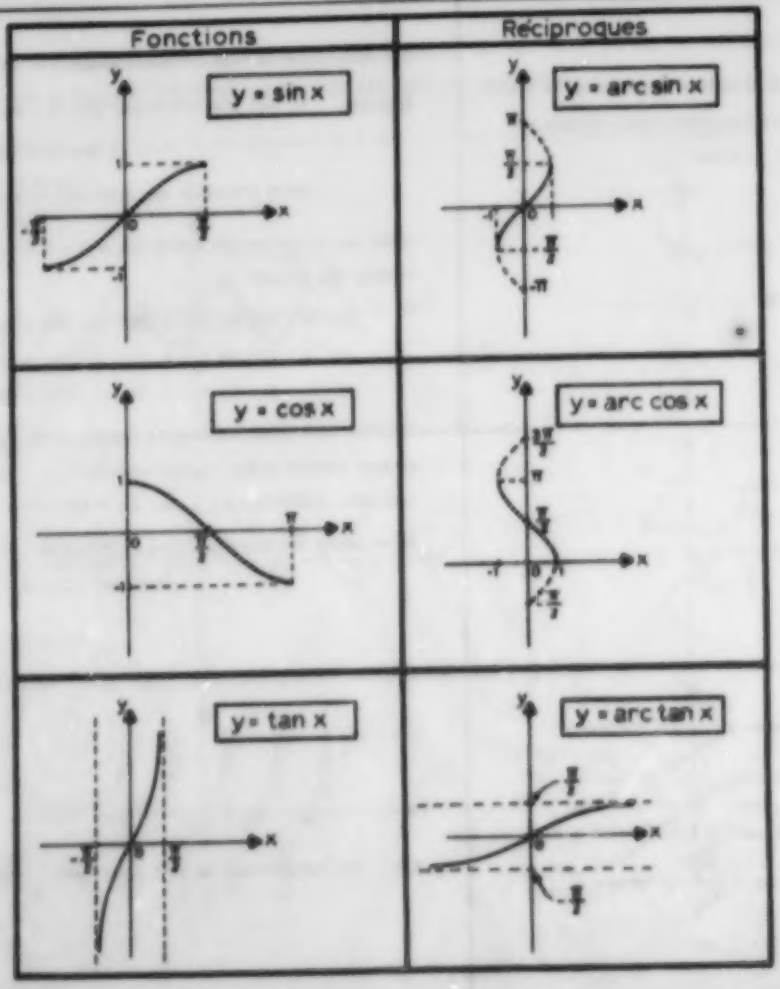
Objectifs intermédiaires	Commentaires
SSI 2.3.11 TRACER le graphique cartésien de la réciproque des fonctions sinus, cosinus ou tangente.	- Rappeler, au besoin, la notion de réciproque d'une fonction. Il faut noter ici que les fonctions trigonométriques ne sont pas injectives, car ce sont des fonctions périodiques. - Montrer que les réciproques de ces fonctions sont des relations non fonctionnelles en examinant les courbes obtenues: 

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.3.11 TRACER le graphique cartésien de la réciproque des fonctions sinus, cosinus ou tangente. (suite)	- Les réciproques se notent respectivement: $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ et $\tan^{-1}x$ ou arc sin x, arc cos x et arc tan x. Remarque: Il faut bien distinguer $\sin^{-1}x$ = arc sin x et $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x} = \csc x$. Faire attention aux notations qu'utilisent les calculatrices. - Noter que la réciproque impose une restriction du domaine si l'on veut parler de fonctions trigonométriques réciproques: $\sin^{-1}x$ = arc sin $x = y$, ssi $x = \sin y$ et $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ $\cos^{-1}x$ = arc cos $x = y$, ssi $x = \cos y$ et $y \in [0, \pi]$ $\tan^{-1}x$ = arc tan $x = y$, ssi $x = \tan y$ et $y \in]-\pi/2, \pi/2[$ Les fonctions sinus, cosinus et tangente dont le domaine est restreint sont dites fonctions principales et sont souvent notées respectivement: Sin x, Cos x et Tan x. Les fonctions trigonométriques réciproques sont notées: Arc Sin x, Arc Cos x et Arc Tan x. Faire tracer les courbes en tenant compte des restrictions. (voir page suivante) N.B.: Ces restrictions ne sont pas uniques; cependant, ce sont les plus utilisées.

Objectifs intermédiaires	Commentaires

2.3.11

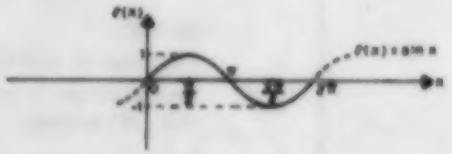
TRACER le graphique cartésien de la réciproque des fonctions sinus, cosinus ou tangente. (suite)



Objectifs intermédiaires	Commentaires
531 2.3.12 et 2.3.13 TROUVER le domaine et l'image des fonctions arc sinus, arc cosinus ou arc tangente.	- En tenant compte des restrictions imposées aux domaines, rappeler que le domaine et l'image des fonctions réciproques correspondent à l'image et au domaine des fonctions trigonométriques associées. dom (sin) = ima (arc sin) = $[-\pi/2, \pi/2]$ ima (sin) = dom (arc sin) = $[-1, 1]$ dom (cos) = ima (arc cos) = $[0, \pi]$ ima (cos) = dom (arc cos) = $[-1, 1]$ dom (tan) = ima (arc tan) = $]-\pi/2, \pi/2[$ ima (tan) = dom (arc tan) = $\mathbb{R}$ Prendre soin de faire le lien avec l'objectif 2.3.8.
531 2.3.12 et 2.3.13 L'une des fonctions arc sinus, arc cosinus ou arc tangente étant donnée, DÉTERMINER si elle est croissante ou décroissante sur un intervalle donné.	- Il suffira ici d'établir un rapport avec l'objectif 2.3.10 en utilisant les courbes tracées précédemment. $f(x) =$ arc sin x, donc arc sin est croissante dans l'intervalle $[-1, 1]$. $f(x) =$ arc cos x, donc arc cos est décroissante dans l'intervalle $[-1, 1]$. $f(x) =$ arc tan x, donc arc tan est croissante dans $\mathbb{R}$.
2.3.14 DÉMONTRER l'identité d'expressions trigonométriques.	- Faire la distinction entre l'égalité et l'identité de formes propositionnelles données. Une identité, c'est une égalité entre deux expressions qui reste toujours vraie pour toutes les valeurs que l'on peut attribuer aux inconnues (c'est une tautologie). Exemple: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ Faire un rappel des relations vues précédemment lorsque l'on a défini les fonctions trigonométriques: $\sin A = 1/\csc A$ $\qquad$ $\tan A = \sin A/\cos A$ $\cos A = 1/\sec A$ $\qquad$ $\cot A = \cos A/\sin A$ $\tan A = 1/\cot A$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.3.14 DÉMONTRER l'identité d'expressions trigonométriques. (suite)	Accorder une grande importance aux identités fondamentales que l'on prendra soin de démontrer: Identité 1: $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ (id_1) Cette identité provient de l'équation décrivant le cercle trigonométrique: $x^2 + y^2 = 1$ où $x = \cos A$ et $y = \sin A$ Identité 2: $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$ (id_2) Cette identité provient de id_1 où chaque terme est divisé par $\cos^2 A$ où $\cos^2 A \neq 0$. Identité 3: $\cot^2 A + 1 = \csc^2 A$ (id_3) Cette identité provient de id_1 où chaque terme est divisé par $\sin^2 A$ où $\sin^2 A \neq 0$. Il est extrêmement important que l'élève fasse de nombreux exercices pour retenir ces relations. Suggestions: • Exprimer tous les rapports trigonométriques en fonction de tan A, de sin A, etc. • Simplifier les expressions suivantes: $\csc A \cdot \tan A \cdot \cos A$ $\sin^2 A (1 + \cot^2 A)$ etc. Prouver les identités suivantes: $(1 - \cos A) \sec A + \sec A = 1$ $\sec B - \cos B = \sin B \cdot \tan B$ etc. • Les fonctions trigonométriques d'une somme ou d'une différence de deux réels sont également très importantes et chacune d'elles devra faire l'objet d'une démonstration en utilisant les diverses identités. Ce sont: $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

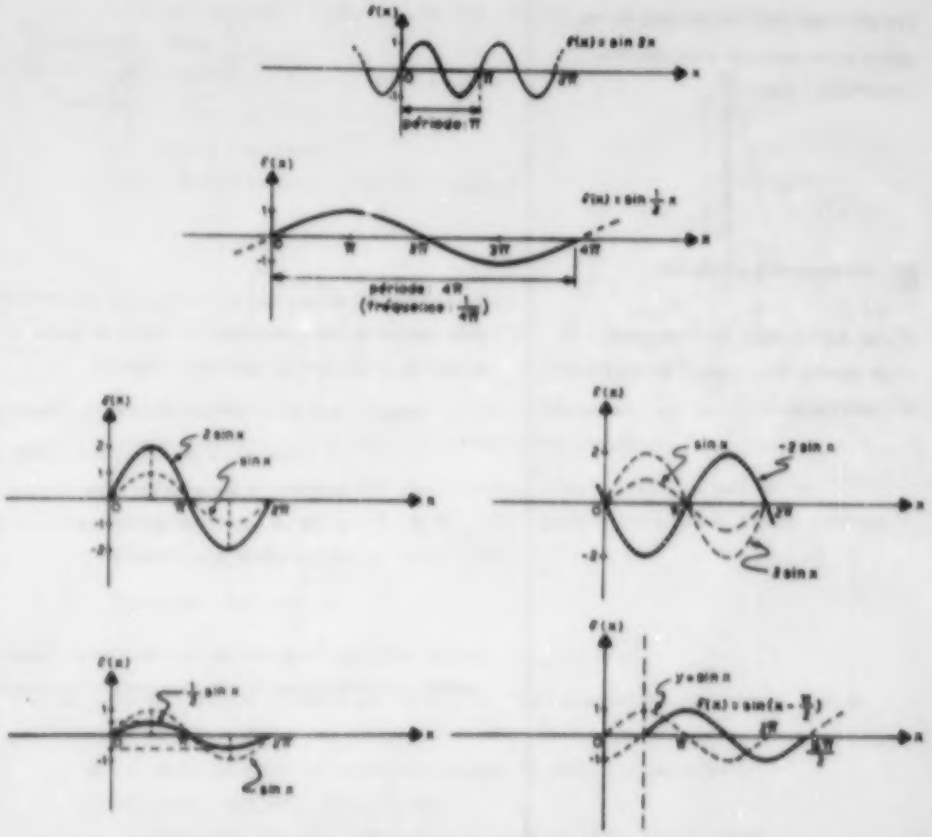
Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.3.14 DÉMONTRER l'identité d'expressions trigonométriques. (suite)	$\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ (où $1 - \tan A \tan B \neq 0$) $\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ (où $1 + \tan A \tan B \neq 0$) $\sin (A + A) = \sin 2A = 2 \sin A \cos A$ $\cos (A + A) = \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ $\tan (A + A) = \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$ (où $1 - \tan^2 A \neq 0$) D'autres relations non moins importantes interviennent dans les démonstrations: $\cos (-A) = \cos A$ $\sin (-A) = -\sin A$ $\sin (\pi/2 - A) = \cos A$ $\cos (\pi/2 - A) = \sin A$ Faire un rappel des propriétés de la fonction d'enroulement (voir objectif 2.3.5) Elles peuvent être démontrées par la relation $\cos (A - B) = \ldots$ - Encore une fois, il est souhaitable que les élèves puissent faire de nombreux exercices afin de bien se familiariser avec ces relations et de les retenir. Suggestions: • Prouver que $\tan (\pi/2 - A) = \cot A$. • Calculer $\sin (A - B)$ si $\sin A = 3/5$, $\cos B = 5/13$; sachant que $P(A)$: 2e quadrant et $P(B)$: 1er quadrant. • etc.
2.3.15 ÉVALUER l'amplitude, la période, la fréquence ou le déphasage d'une fonction sinusoïdale.	- Définir les concepts d'amplitude, de période, de fréquence et de déphasage. - faire l'étude de la fonction $f(x) = A \sin (B(x - h)) + k$ en se rappelant que: $y = Af(x)$ désigne une dilatation verticale (amplitude), considérant A

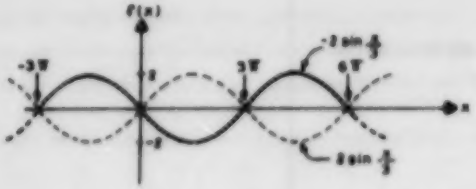
Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.3.15 ÉVALUER l'amplitude, la période, la fréquence ou le déphasage d'une fonction sinusoïdale. (SUITE)	$y = f(Bx)$ désigne une dilatation horizontale (période), considérant B $y = f(x - h)$ désigne une translation horizontale (déphasage), considérant h. $y = f(x) + k$ désigne une translation verticale, considérant k. - Définir les notions précédentes en fonction des paramètres de la fonction $f(x) = A \sin (B(x - h)) + k$. l'amplitude est: $\lvert A \rvert$ la période est: $\frac{2\pi}{\lvert B \rvert}$ le déphasage est: h la translation verticale est: k la fréquence, l'inverse de la période, est: $\frac{\lvert B \rvert}{2\pi}$ - Toute cette étude doit être accompagnée de courbes montrant l'effet d'un ou plusieurs paramètres. On suggère ici d'utiliser l'ordinateur, des transparents à acétate, etc. Les graphiques suivants montreront le jeu des différents paramètres: 

Objectifs intermédiaires	Commentaires

2.3.15

ÉVALUER l'amplitude, la période, la fréquence ou le déphasage d'une fonction sinusoïdale. (suite)



Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.3.15 ÉVALUER l'amplitude, la période, la fréquence ou le déphasage d'une fonction sinusoïdale. (suite)	
531 2.3.16 DÉTERMINER les zéros, s'ils existent, d'une somme ou d'un produit de fonctions trigonométriques.	- Une équation trigonométrique est une équation qui renferme une expression trigonométrique. Montrer que pour résoudre de telles équations, il suffit de trouver l'ensemble-solution, c'est-à-dire la ou les valeurs de la variable qui vérifient l'égalité. Exemple: Quel est l'ensemble-solution de l'équation $2 \sin x - 1 = 0$? En isolant sin x on obtient $\sin x = 1/2$ d'où $(x = \pi/6) \vee (x = 5\pi/6)$ dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. Étant donné que cette fonction est périodique et que, dans ce problème, il n'y a pas de restriction sur le domaine, il faut trouver toutes les solutions en dehors de la période du sinus, soit: $(x \in \mathbb{R} \mid x = \pi/6 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}) \vee (x \in \mathbb{R} \mid x = 5\pi/6 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z})$ - Montrer qu'il faut, dans bien des cas, simplifier l'équation donnée à l'aide des identités et solutionner l'équation en appliquant les axiomes et les propriétés des nombres réels.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.3.17 DÉTERMINER les rapports trigonométriques dans le triangle rectangle.	- Cet objectif de quatrième secondaire (2.4) a été rappelé précédemment lors de l'étude de l'objectif 2.3.6. Ici, on doit présenter à l'élève des problèmes utilisant les rapports trigonométriques dans diverses situations. • La longueur d'un fil de fer attaché à un poteau est de 12,6 m. Ce fil fait un angle de 71°20' par rapport à l'horizontale. À quelle hauteur au-dessus du sol est-il attaché? • L'angle d'élévation du sommet d'une tour est 27°12'. Si l'on s'approche à 100 m de la tour, l'angle d'élévation est de 56°24'. Quelle est la hauteur de la tour? • Du haut d'un édifice de 90 m de hauteur, l'angle de dépression d'une automobile est 49°10'. À quelle distance du pied de l'édifice se trouve cette automobile? • Un homme de 1,56 m regarde un OVNI immobilisé dans le ciel; l'angle que fait son rayon visuel avec l'horizontale est de 65°. Si cet homme mesurait 1,95 m, l'angle ne serait que de 66°. À quelle altitude se trouve l'OVNI? • etc.
2.3.18 ÉVALUER des mesures en appliquant la loi des sinus ou la loi des cosinus.	- La résolution d'un triangle quelconque peut se faire si l'une des conditions suivantes est remplie: a) on connaît un côté et deux angles (loi du sinus); b) on connaît deux côtés et l'angle compris entre ces côtés (loi du cosinus); c) on connaît trois côtés (loi du cosinus); d) on connaît deux côtés et un angle opposé à l'un de ces côtés (loi du sinus).

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.3.10 ÉVALUER des mesures en appliquant la loi des sinus ou la loi des cosinus. (Suite)	- Démontrer chacune des lois. Loi des sinus Les côtés d'un triangle quelconque étant proportionnels aux sinus des angles opposés à ces côtés, on a: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ Loi des cosinus Le carré de la longueur d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, moins le double produit des longueurs des deux autres côtés par le cosinus de l'angle compris: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ ENRICHISSEMENT - Montrer, lors de la démonstration de la loi des sinus, le résultat intermédiaire qui permet d'évaluer l'aire d'un triangle quelconque: Aire $= \frac{bc \sin A}{2}$ ou Aire $= \frac{ac \sin B}{2}$ ou Aire $= \frac{ab \sin C}{2}$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.3.18 ÉVALUER des mesures en appliquant la loi des sinus ou la loi des cosinus. (suite)	- Faire appliquer ces lois dans la résolution de problèmes concrets: • Les distances entre trois villes A, B et C sont les suivantes: A et B sont distantes l'une de l'autre de 120 km, B et C de 140 km et C et A de 160 km. Deux automobiles partent de B et se dirigent l'une vers A, l'autre vers C. Trouve l'angle formé par les directions de leur déplacement. • Deux trains partent ensemble d'une même gare et vont dans deux directions faisant un angle dont la mesure en degré est 65. Si l'un fait 40 km/h et l'autre 50 km/h, à quelle distance seront-ils l'un de l'autre au bout de 3 heures? • etc.

OBJECTIF GÉNÉRAL

N°: 3

FAVORISER chez l'élève l'analyse de situations géométriques.

Thème: La géométrie

Durée: 15% du temps

Au premier cycle du cours secondaire, l'étude de la géométrie consiste en une exploration de certaines transformations du plan (translation, rotation, réflexion et homothétie). L'étude de celles-ci au second cycle du secondaire permettra à l'élève de dégager les propriétés de certaines transformations du plan et de mettre en évidence certains invariants (régularités) qu'elles engendrent. Il sera alors capable d'utiliser ses connaissances géométriques pour résoudre des problèmes puisés dans son environnement et qui font appel aux concepts de congruence, de similitude, de relations métriques, de rapports trigonométriques, etc.

D'exploratoire qu'il est au premier cycle du secondaire, l'enseignement de la géométrie passe à une phase d'abstraction plus poussée et de déduction plus rigoureuse. Sans pour autant devenir mécanique, l'enseignement de la géométrie au second cycle du secondaire est plus raisonné et il sauvegarde la dynamique de l'étude de la géométrie des transformations dans son aspect unificateur: ensembles, relations, opérations, etc.

Si le programme du second cycle du secondaire favorise une approche "transformationnelle" dans l'étude des notions géométriques, c'est dans un souci de continuité avec le programme du primaire et celui du premier cycle du secondaire, et dans le but d'unifier les différents concepts étudiés.

Au premier cycle du secondaire, l'élève a appris à:

- reproduire une figure plane à l'aide de transformations géométriques;
- identifier l'image d'une relation;
- construire diverses figures géométriques planes à l'aide des transformations;
- identifier les diverses caractéristiques se rapportant aux triangles et aux quadrilatères à l'aide des transformations;
- résoudre des problèmes de la vie courante utilisant les unités de mesure de longueur ou de surface à l'aide des transformations.

Après avoir dégagé les principaux invariants de transformations géométriques, l'élève du second cycle du secondaire va apprendre à utiliser les notions d'isométrie et de similitude pour résoudre certains problèmes et découvrir l'existence de certains rapports trigonométriques (sinus, cosinus, tangente) et de certaines relations métriques dans le cercle et dans le triangle rectangle. L'étude de quelques caractéristiques des corps solides vient compléter celle des segments et des polygones effectuée au premier cycle du secondaire.

Comme dans ce programme, la didactique de la géométrie est basée sur le concept de transformations du plan, il importe de préciser au départ que celles-ci agissent sur l'ensemble des points du plan. Cependant, dans la pratique, les observations et les conclusions ne porteront que sur certains sous-ensembles de celui-ci: le triangle, le carré, etc.

L'étude des transformations géométriques effectuée au premier cycle du secondaire et à l'intérieur de cet objectif général a pour but d'établir les fondements de la géométrie en fournissant à l'élève un outil puissant permettant de déboucher sur la résolution de problème en favorisant l'emploi d'heuristiques variées. Il est souhaitable de s'interroger sur cette question, sur son importance et sur son impact dans l'étude de notions géométriques. L'importance et l'impact de la géométrie des transformations résident beaucoup plus dans l'analyse des changements, des propriétés et des développements possibles, que dans son aspect purement novateur dans l'enseignement.

Le support visuel est très important en géométrie, car il permet très souvent de soutenir le raisonnement. Il convient cependant d'habituer l'élève à être circonspect quant aux représentations concrètes, même si l'enseignant exige de celui-ci une grande précision dans la construction de ses graphiques, car les représentations graphiques ne sont, très souvent en mathématique, qu'une approximation grossière de la réalité.

L'emploi de la calculatrice permettra à l'élève de se dégager du calcul numérique pour accorder une plus grande importance aux raisonnements géométriques. L'usage des rapports trigonométriques, comme application des rapports de similitude sur les triangles rectangles, invite inévitablement l'élève à l'emploi de la calculatrice. Ici, elle devient même essentielle, car elle remplace les "tables trigonométriques". On ne pourrait trouver d'exemples plus évidents des multiples avantages qu'elle procure à son utilisateur.

OBJECTIF TERMINAL N°: 3.1 RÉSOUDRE DES PROBLÈMES ISSUS DE SITUATIONS DE LA VIE COURANTE APPLIQUANT LA NOTION D'ISOMÉTRIE.

Le concept d'isométrie découle directement de la notion d'invariance qui caractérise certaines transformations géométriques: les translations, les rotations, les réflexions ou les composées de ces transformations du plan. Celles-ci gardent en effet invariants: l'ordre, les longueurs, les mesures d'angles et ce qui en découle: le parallélisme et la perpendicularité. Ces caractéristiques permettent de définir la congruence entre des figures géométriques (segments et polygones). Des figures seront dites isométriques si elles ont même mesure pour chaque élément homologue qui les compose.

Il convient donc d'établir un lien très étroit entre l'objectif 2.1 du programme du second cycle (416-3302) et celui-ci, afin de bien faire percevoir à l'élève que la notion de congruence se déduit de l'étude des caractéristiques de certaines transformations géométriques. Il est en effet possible d'affirmer que:

> "Deux figures sont congruentes si et seulement si il existe une transformation isométrique (ou une composée de celles-ci) qui applique l'une sur l'autre".

Dans le cadre d'une introduction à une étude déductive de la géométrie, il convient de considérer cet énoncé comme un postulat, car autrement, les démonstrations devraient faire appel à une axiomatisation excessive qui serait de toute façon hors de portée pour la majorité des élèves du niveau secondaire.

L'étude de la congruence s'effectuera principalement sur les triangles car le triangle est l'élément de base de tout polygone et il constitue une figure géométrique relativement simple, facile à investiguer par l'élève.

Cet objectif terminal va amener l'élève à appliquer des théorèmes ou corollaires relatifs au concept d'isométrie; cet objectif vise avant tout à développer l'esprit déductif de l'élève de cinquième secondaire en considérant comme des propriétés les "trois cas d'isométrie des triangles" qui étaient présentés traditionnellement comme les fondements sur lesquels se basaient toutes les démonstrations portant sur les triangles congruents ("égaux") et leurs caractéristiques.

Il convient d'introduire graduellement l'idée de démonstration, car l'élève de cinquième secondaire n'a jamais été habitué à systématiser une démarche ou un raisonnement. C'est le but que vise l'objectif terminal 3.1, à partir de situations de la vie courante.

Il résulte donc que l'atteinte de l'objectif terminal 3.1 exigera que l'élève de cinquième secondaire soit capable de résoudre des problèmes appliquant la notion d'isométrie en structurant la solution de ses problèmes, en justifiant les étapes de son raisonnement, tout en se basant sur les théorèmes ou corollaires énoncés dans les commentaires portant sur l'objectif intermédiaire 3.1.2.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.1.1 COMPARER sous divers critères (angle, côté, périmètre, aire) des polygones congrus.	- Une telle démarche permet d'introduire lentement l'idée de preuve et de structurer le raisonnement de l'élève. - Deux polygones congruents possèdent: • des angles correspondants congruents; • des côtés homologues congruents; • des périmètres de même mesure; • des aires de même mesure; car seule une transformation isométrique (ou une composée de celle-ci) peut appliquer l'un sur l'autre. - Soit les deux polygones MEQ et M'E'Q'. P et P' sont respectivement les périmètres des triangles MEQ et M'E'Q'; A et A' sont respectivement les aires des triangles MEQ et M'E'Q'; Il est possible de faire découvrir à l'élève que le rapport des mesures des éléments homologues est 1. - L'élève pourra plus tard constater que la congruence est un cas particulier de la similitude. C'est une similitude de rapport unitaire.
3.1.2 ÉNONCER les propriétés de congruence, les théorèmes ou les corollaires impliqués dans la résolution d'un problème.	- Il convient de préciser certains termes utilisés dans un système axiomatique bien structuré. • Un <u>postulat</u> est un principe universellement reconnu, bien que non démontré, et qui est posé à la base d'un système déductif. • Un <u>théorème</u> est un énoncé qu'il est possible de démontrer à l'aide d'un raisonnement déductif basé sur des postulats ou d'autres théorèmes.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.1.2 ÉNONCER les propriétés de congruence, les théorèmes ou les corollaires impliqués dans la résolution d'un problème. (suite)	• Un corollaire est un énoncé qui se déduit immédiatement d'un théorème. - Cet objectif vise à développer l'esprit logique de l'élève en l'amenant à structurer ses raisonnements. Les habiletés que l'élève développera en appliquant un certain nombre de théorèmes ou corollaires seront directement utilisables pour résoudre certains problèmes du quotidien. Il convient donc d'exiger que l'élève appuie la solution des problèmes sur un raisonnement logique et structuré. - Voici à titre indicatif une liste non exhaustive de théorèmes ou corollaires qui peuvent être soumis à l'élève. Le choix de ceux-ci a été fait de façon à en permettre l'utilisation pour résoudre un grand nombre de problèmes: 1- Une rotation de 180°, dont le centre est à l'origine d'une demi-droite, place l'image de celle-ci sur son prolongement. 2- Les angles opposés par le sommet sont congruents. 3- Dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés congruents sont congruents. 4- Dans tout triangle isocèle, la médiatrice du côté adjacent aux angles congruents comprend la bissectrice, la médiane et la hauteur issues de l'angle opposé à ce côté. 5- Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles entre elles. 6- Si une sécante coupe deux droites parallèles, alors: - les angles alternes-internes sont congruents, - les angles alternes-externes sont congruents, - les angles correspondants sont congruents. 7- La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle égale 180°. 8- La somme des mesures des angles d'un polygone égale autant de fois 180° qu'il y a de côtés, moins deux. 9- La somme des mesures des angles extérieurs à un polygone convexe est égale à 360°. 10- Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. 11- Les angles non consécutifs d'un parallélogramme sont congruents. 12- Les côtés opposés ou non consécutifs d'un parallélogramme sont congruents.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.1.2 ÉNONCER les propriétés de congruence, les théorèmes ou les corollaires impliqués dans la résolution d'un problème. (suite)	13- Le segment de droite qui joint le milieu de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et sa mesure en est la moitié. - Démontrer des théorèmes ou des corollaires à l'aide de la notion d'isométrie.

OBJECTIF TERMINAL N°: 3.2 RÉSOUDRE DES PROBLÈMES ISSUS DE SITUATIONS DE LA VIE COURANTE APPLIQUANT LA NOTION DE SIMILITUDE.

Le concept de similitude peut se déduire de la notion d'invariance qui caractérise une transformation géométrique particulière: l'homothétie. Celle-ci garde en effet invariants: l'ordre, le rapport des mesures des longueurs, les mesures des angles et ce qui en découle: le parallélisme et la perpendicularité. Ces caractéristiques permettent de définir la similitude entre des figures géométriques (segments et polygones).

Il convient donc d'établir un lien très étroit entre l'objectif 2.1 du programme du second cycle (416-3302) et celui-ci afin de bien faire percevoir à l'élève que la notion de similitude découle directement de l'étude des caractéristiques de l'homothétie. Il est en effet possible d'affirmer que:

> "Deux figures sont semblables si et seulement si il existe une homothétie (ou une composée de transformations) qui applique l'une sur l'autre".

Dans le cadre d'une introduction à une étude déductive de la géométrie, il convient de considérer cet énoncé comme un postulat, car autrement, les démonstrations devraient faire appel à une axiomatisation excessive qui serait de toute façon hors de portée pour la majorité des élèves du niveau secondaire.

L'étude de la similitude s'effectuera principalement sur les triangles, car le triangle est l'élément de base de tout polygone et il constitue une figure géométrique relativement simple, facile à investiguer par l'élève.

Cet objectif terminal se propose d'amener l'élève à appliquer des théorèmes ou corollaires relatifs à la similitude. Cet objectif vise avant tout à développer l'esprit déductif de l'élève de cinquième secondaire, en considérant comme des propriétés les "trois cas de similitude des triangles", qui étaient présentés traditionnellement comme les fondements sur lesquels se basaient toutes les démonstrations portant sur les triangles semblables et leurs caractéristiques.

Il convient d'introduire graduellement l'idée de démonstration, car l'élève de cinquième secondaire commence à peine à structurer un raisonnement déductif.

Il résulte donc que l'atteinte de l'objectif terminal 3.2 exigera que l'élève de cinquième secondaire soit capable de résoudre des problèmes appliquant la notion de similitude en structurant la solution de ses problèmes, en justifiant les étapes de son raisonnement tout en se basant sur les théorèmes ou corollaires énoncés dans les commentaires portant sur l'objectif intermédiaire 3.2.2.

La notion de similitude est particulièrement intéressante dans ses applications sur les triangles rectangles et les relations métriques. Le calcul des distances, de la pente d'une droite, de rapports trigonométriques (sinus, cosinus, tangente), l'emploi de cartes, de plans réduits ou de gros plans, l'usage des rapports de similitude en cartographie, en arpentage ou lors d'activités de repérage ou de mesurage sont autant d'applications intéressantes de l'idée de similitude.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.1 COMPARER sous divers critères (angle, côté, périmètre, aire) des polygones semblables.	- Les comparaisons devraient s'effectuer à partir d'une démarche expérimentale sur des polygones semblables relativement simples. Une généralisation des conclusions pourrait survenir à la suite d'observations sur d'autres figures semblables plus complexes. - Une telle approche est appelée démarche inductive en ce sens qu'elle permet à l'élève d'induire une conclusion générale à partir d'observations sur des cas particuliers. - Une telle démarche pourrait se concrétiser en faisant remplir des tableaux qui orientent l'élève graduellement vers une conclusion, en partant de figures données. Voici un exemple: Soient les deux trapèzes rectangles semblables suivants: P_1 et P_2 sont respectivement les périmètres des figures ① et ② ; A_1 et A_2 sont respectivement les aires des figures ① et ② ; r_1, r_2, r_3 et r_4 sont respectivement les rapports des angles, des côtés, des périmètres et des aires.

Objectifs intermédiaires	Commentaires

3.2.1

COMPARER sous divers critères (angle, côté, périmètre, aire) des polygones semblables. (suite)

Compléter le tableau suivant:

Polygones				Rapports		Conclusions	
1		2					
$m\angle A$		$m\angle A'$		$\frac{m\angle A}{m\angle A'}$		r_1	
$m\angle B$		$m\angle B'$		$\frac{m\angle B}{m\angle B'}$			
$m\angle C$		$m\angle C'$		$\frac{m\angle C}{m\angle C'}$			
$m\angle D$		$m\angle D'$		$\frac{m\angle D}{m\angle D'}$			
$m\overline{AB}$		$m\overline{A'B'}$		$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{A'B'}}$		r_2	
$m\overline{BC}$		$m\overline{B'C'}$		$\frac{m\overline{BC}}{m\overline{B'C'}}$			
$m\overline{CD}$		$m\overline{C'D'}$		$\frac{m\overline{CD}}{m\overline{C'D'}}$			
$m\overline{DA}$		$m\overline{D'A'}$		$\frac{m\overline{DA}}{m\overline{D'A'}}$			
P_1		P_2		$\frac{P_1}{P_2}$		r_3	
A_1		A_2		$\frac{A_1}{A_2}$		r_4	

Comparer les rapports r_3, r_1 et r_4.

L'élève doit arriver aux conclusions suivantes:

$$r_1 = 1$$

$$r_2 = r_3$$

$$(r_2)^2 = (r_3)^2 = r_4$$

r_2 est le rapport de similitude.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.1 COMPARER sous divers critères (angle, côté, périmètre, aire) des polygones semblables. (suite)	- Il serait souhaitable de placer l'élève devant l'analyse d'un cas où les rapports r_1, r_2, r_3 et r_4 sont tous égaux à 1. Cette situation va permettre à l'élève de découvrir que la congruence est un cas particulier de la similitude.
3.2.2 ÉNONCER les propriétés de similitude, les théorèmes ou les corollaires impliqués dans la résolution d'un problème.	- Certains termes utilisés dans un système axiomatique bien structuré sont définis dans le commentaire sur l'objectif intermédiaire 3.1.2. - Cet objectif vise à développer l'esprit logique de l'élève en l'amenant à structurer ses raisonnements. Les habiletés que l'élève acquerra en appliquant un certain nombre de théorèmes ou corollaires seront directement utilisables pour résoudre certains problèmes du quotidien. Il convient donc d'exiger que l'élève appuie la solution des problèmes sur un raisonnement logique et structuré. - Voici à titre indicatif une liste non exhaustive de théorèmes ou corollaires qui peuvent être soumis à l'élève. Le choix de ceux-ci a été fait de façon à en permettre l'utilisation pour résoudre un grand nombre de problèmes. 1- Des sécantes, coupées par des parallèles, sont partagées en segments proportionnels. 2- Toute parallèle à un côté, passant par un point intérieur d'un triangle, détermine un triangle semblable au premier. 3- Dans les polygones réguliers et semblables, les périmètres sont proportionnels aux rayons des cercles circonscrits et aux apothèmes respectifs. 4- Dans un triangle rectangle, les deux triangles déterminés par la hauteur relative à l'hypoténuse sont semblables entre eux et chacun d'eux est semblable au premier. 5- Dans tout triangle rectangle: - la mesure d'un côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et celle de l'hypoténuse entière; - la mesure de la hauteur est moyenne proportionnelle entre la mesure des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse;

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.2 ÉNONCER les propriétés de similitude, les théorèmes ou les corollaires impliqués dans la résolution d'un problème.	- le produit des mesures des deux côtés de l'angle droit est égal au produit de la mesure de l'hypoténuse par celle de la hauteur issue de l'angle droit; - le carré de la mesure de l'hypoténuse égale la somme des carrés des mesures des deux autres côtés. 6. Deux circonférences sont dans le même rapport que leurs rayons respectifs. 7. Le rapport d'une circonférence à son diamètre est une constante que l'on note π. - Démontrer des théorèmes ou corollaires à l'aide de la notion de similitude.

OBJECTIF TERMINAL N°: 3.3 RÉSOUDRE DES PROBLÈMES ISSUS DE SITUATIONS DE LA VIE COURANTE FAISANT APPEL AUX RELATIONS DANS LE CERCLE OU DANS LE TRIANGLE RECTANGLE.

Cet objectif permet l'étude d'un éventail de propriétés et de relations associées aux tangentes, aux sécantes, aux cordes, aux angles ainsi qu'aux figures inscrites ou circonscrites.

Il serait important, dans un premier temps, de définir clairement les termes suivants:

- cercle, disque et circonférence,
- rayon et diamètre,
- corde, sécante et tangente,
- arc,
- angle au centre, angle inscrit, etc.

Afin d'éliminer un mauvais abus de langage, il faudrait que l'élève distingue la différence entre "cercle" et "circonférence". En quelques mots, il est possible d'affirmer que:

"La circonférence est au cercle ce que le périmètre est au polygone".

En d'autres termes, la circonférence peut être définie comme étant le périmètre du cercle.

Il convient d'établir un lien très étroit entre l'objectif 2.1 du programme du second cycle (#16-3302) et celui-ci, afin de faire percevoir à l'élève que les transformations du plan l'aideront à mieux découvrir et comprendre les invariants dans les cercles ou les triangles rectangles. Par exemple, toutes les relations métriques dans les triangles rectangles sont des invariants qui découlent des rapports d'homothétie.

Les relations dans le cercle ou dans le triangle rectangle trouvent de nombreuses applications dans des domaines très divers: la mécanique, l'arpentage, l'optique, la menuiserie, etc. Il convient donc de rechercher des applications diversifiées et de favoriser une démarche propre à la résolution de problème.

L'atteinte de cet objectif terminal exige que l'élève de cinquième secondaire soit capable de résoudre des problèmes appliquant les notions de congruence, de similitude et de relations dans le cercle ou le triangle, en structurant la solution de ses problèmes, en justifiant les étapes de son raisonnement tout en se basant sur les théorèmes ou corollaires appliqués aux objectifs intermédiaires 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3 et 3.3.5. Certains termes utilisés dans un système axiomatique bien structuré sont définis dans le commentaire sur l'objectif intermédiaire 3.1.2. Les objectifs 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3 et 3.3.5 visent à développer l'esprit logique de l'élève en l'amenant à structurer son raisonnement. Les habiletés que l'élève va acquérir en appliquant un certain nombre de théorèmes ou corollaires seront directement utilisables pour résoudre certains problèmes du quotidien.

Voici à titre indicatif une liste non exhaustive de théorèmes ou corollaires s'appliquant à un grand nombre de problèmes.

1- Deux cordes d'un cercle, situées à une même distance du centre, sont congruentes.

2- Dans un cercle, des arcs congruents déterminent des cordes congruentes et réciproquement.

3- Dans un cercle, tout rayon perpendiculaire à une corde partage celle-ci en deux segments congruents.

4- Dans un cercle, tout rayon perpendiculaire à une corde partage l'arc sous-tendu en deux arcs congruents.

5- Toute médiatrice à une corde détermine un diamètre.

6- Trois points non colinéaires déterminent un et un seul cercle.

7- Les arcs compris entre deux cordes parallèles sont congruents.

8- Toute tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de tangence.

9- Deux tangentes à un cercle issues d'un même point déterminent des segments isométriques.

10- La mesure d'un angle inscrit est égale à la demi-mesure de l'arc intercepté.

11- La mesure d'un angle dont le sommet est à l'intérieur d'un cercle est égale à la demi-somme des mesures des arcs interceptés par les côtés de l'angle et de leur prolongement.

12- La mesure d'un angle dont le sommet est à l'extérieur du cercle est égale à la valeur absolue de la demi-différence des mesures en degrés des arcs interceptés par ses côtés.

13- Le rapport des circonférences et celui des rayons de deux cercles forment une proportion.

14- Le rapport des aires et celui du carré des rayons respectifs forment une proportion.

15- Dans un triangle rectangle, le côté opposé à un angle de 30^0 mesure la moitié de l'hypoténuse.

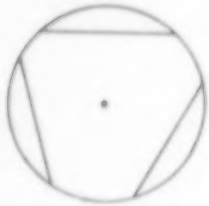
16- Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse détermine des triangles semblables au premier.

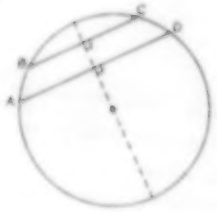
17- Dans un triangle rectangle, un côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse entière.

18- Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse égale la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

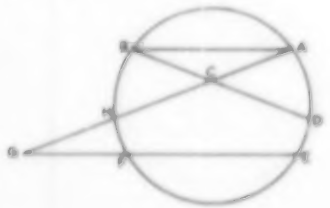
19- Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

Démontrer des théorèmes ou corollaires découlant des relations dans le cercle ou dans le triangle rectangle.

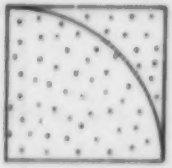
Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.1 ÉNONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations entre divers arcs ou cordes dans un cercle.	- Il est souhaitable de faire découvrir à l'élève ces relations à partir de manipulations accompagnées de raisonnements déductifs qui s'appuient sur les rotations ou les réflexions dans le plan. - Voici différentes mises en situation et l'énoncé des relations que l'élève devrait découvrir. • Plusieurs cordes sont tracées dans un cercle et on y indique les distances de celles-ci au centre du cercle. En faisant effectuer les rotations appropriées, l'élève devrait découvrir que: "Deux cordes d'un cercle, situées à une même distance du centre, sont congruentes." • Des arcs congruents sont tracés sur un cercle. Certaines rotations amèneront l'élève à conclure que: "Dans un cercle, des arcs congruents déterminent des cordes congruentes."  • Dans un cercle, un rayon est perpendiculaire à une corde. Le prolongement du rayon fournit l'axe de symétrie du cercle. L'élève pourra alors déterminer la réflexion qui applique tout point de $\overline{AB}$ sur $\overline{CD}$, et E est donc un point milieu. L'élève pourra conclure que: "Dans un cercle, tout rayon perpendiculaire à une corde partage celle-ci en deux segments congruents."

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.1 ÉNONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations entre divers arcs ou cordes dans un cercle. (suite)	Il est également possible de montrer que: "Dans un cercle, tout rayon perpendiculaire à une corde partage l'arc sous-tendu en deux arcs congruents." Enfin, comme le diamètre est une corde passant par le centre du cercle et qu'il est également un segment de l'axe de symétrie, l'élève conclura que: "Toute médiatrice à une corde détermine un diamètre." • Que provoque, dans un cercle, la création de deux cordes parallèles? En construisant une médiatrice à ces cordes, l'élève détermine un axe de symétrie et une réflexion définie qui applique $\overset{\frown}{AB}$ sur $\overset{\frown}{CD}$. Il est alors permis de conclure que: "Les arcs compris entre deux cordes parallèles sont congrus."  faire observer

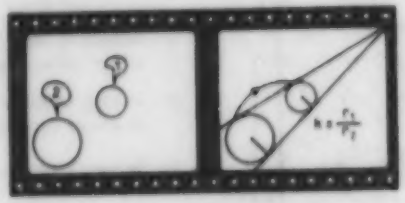
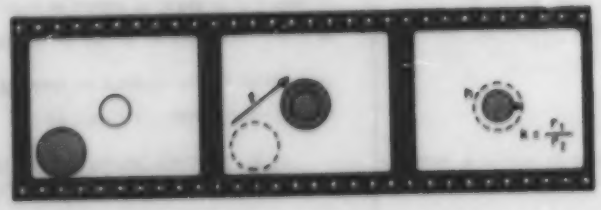
Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.1 ÉNONCER les règles intervenant dans les problèmes impliquant des relations entre divers arcs ou cordes dans un cercle. (suite)	L'élève devrait être en mesure d'établir la relation qui existe entre la tangente et le rayon qui aboutit au point de tangence: "Toute tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de tangence." - La recherche de ces relations peut s'effectuer en utilisant le papier calque pour faciliter les rotations et le pliage pour effectuer les réflexions.
3.3.2 ÉNONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques dans un cercle.	- Présenter à l'élève les différents types d'angles par rapport au cercle: • angle au centre, • angle inscrit, • angle dont le sommet n'est ni au centre ni sur le cercle. - Avant de débuter la recherche de relations, il faut établir que: "La mesure d'un angle au centre est égale à la mesure de l'arc intercepté". L'élève devrait être amené à découvrir les différentes relations: - ...re des arcs et des angles; ...férentes mesures; - les différentes relations à partir de multiples ...elations décrivent les invariants. ...représentés L'élève devra ...ivantes: ...est égale ...intercepté".

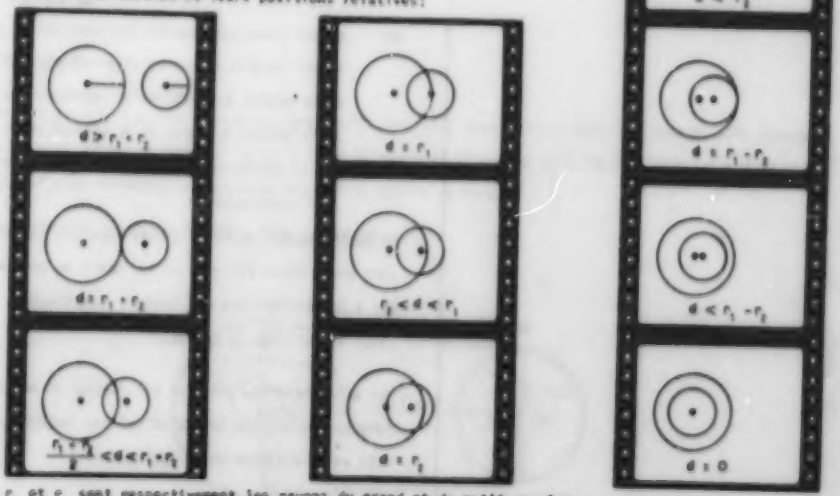


Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.2 ENONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques dans un cercle. (suite)	"La mesure d'un angle dont le sommet est à l'intérieur d'un cercle est égale à la demi-somme des mesures des arcs interceptés par les côtés de l'angle et de leurs prolongements". $m\angle ACD = \frac{m\overset{\frown}{BH} + m\overset{\frown}{AD}}{2}$ "La mesure d'un angle dont le sommet est à l'extérieur du cercle est égale à la valeur absolue de la demi-différence des mesures des arcs interceptés par ses côtés". $m\angle G = \left\lvert \frac{m\overset{\frown}{AE} - m\overset{\frown}{HF}}{2} \right\rvert$ - En inscrivant un triangle rectangle dans un cercle, l'élève pourrait être amené à vérifier l'énoncé: "Dans un triangle rectangle, le côté opposé à un angle de 30^0 mesure la moitié de l'hypoténuse". - Faire découvrir à l'élève que pour un triangle rectangle inscrit dans un cercle, l'hypoténuse du triangle est toujours un diamètre. - Au premier cycle du secondaire, l'élève a établi les relations: $C = \pi d$ ou $C = 2\pi r$ $A = \pi r^2$ où: C indique la circonférence du cercle, d indique la mesure du diamètre, r indique la mesure du rayon, A indique l'aire du disque, π égale 3,141 592 653 ... - Une activité intéressante serait de rechercher la valeur de π à l'aide d'un nuage de points répartis aléatoirement sur un carré dont le côté égale celui du rayon. Il est alors possible d'établir le rapport à obtenu en effectuant le quotient du nombre de points répartis sur le secteur circulaire par le nombre de points répartis sur la surface totale du carré:

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.2 ÉNONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques dans un cercle. (suite)	$k = \frac{\text{nombre de points du nuage sur la surface du secteur circulaire}}{\text{nombre de points du nuage sur la surface du carré}}$ La comparaison des aires permet d'écrire: $k = \frac{A_1}{A_2}$ où A_1 est l'aire du secteur circulaire, A_2 est l'aire du carré, et comme: $A_1 = \frac{\pi r^2}{4}$ et $A_2 = r^2$  il est possible d'écrire: $k = \frac{A_1}{A_2}$ $= \frac{\frac{\pi r^2}{4}}{r^2}$ $= \frac{\pi}{4}$ et de conclure théoriquement que $\pi = 4k$. En pratique, plus le nombre de points du nuage sera grand, plus la valeur de $4k$ tendra vers π. - Il est important de bien faire remarquer à l'élève que π est un nombre réel non périodique illimité et qu'il ne faut pas confondre π, 3,1416 et $\frac{22}{7}$ car: $\pi < 3{,}1416 < \frac{22}{7}$. - Il peut être intéressant de demander aux élèves de concevoir un programme qui permette de simuler la démarche qui vient d'être exposée. Certaines notions en géométrie analytique sont indispensables; l'une de celle-ci est que l'équation associée à un cercle centrée à l'origine est de la forme $x^2 + y^2 = r^2$. Voici quelques éléments d'une solution possible:

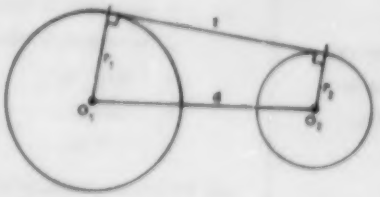
Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.2 ÉNONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques dans un cercle. (suite)	1- Utiliser un "générateur" de nombres aléatoires et respecter les deux conditions: $0 \leq x \leq 1$ $0 \leq y \leq 1$ 2- Compter le nombre de couples (x, y) respectant ces deux contraintes et placer cette valeur dans la variable A. 3- Compter le nombre de couples (x, y) respectant la condition $x^2 + y^2 \leq 1$ et placer cette valeur dans la variable B. 4- Évaluer l'expression $4\frac{B}{A}$. L'élève constatera que plus la valeur de A est grande, plus $4\frac{B}{A}$ tend vers π. - Une autre relation intéressante est le lien entre la mesure d'un angle au centre en degrés et celle de l'arc interceptè en unités de longueur. Le postulat retenu au début du commentaire sur cet objectif permet d'affirmer que: $\frac{\theta}{360^0} = \frac{\text{mesure (en degrés) de l'arc s}}{\text{mesure (en degrés) du cercle c}}$ et comme il est possible d'écrire: $\frac{\text{mesure (en unités de longueur) de l'arc s}}{\text{mesure (en unités de longueur) du cercle c}} = \frac{\text{mesure (en degrés) de l'arc s}}{\text{mesure (en degrés) du cercle c}}$ d'où $\frac{s}{C} = \frac{\theta}{360^0}$ $s = \frac{C\theta}{360^0}$ $s = \frac{2\pi r\theta}{360^0}$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.3 ENONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques entre deux cercles.	- Soient les cercles ① et ② suivants. Il existe une homothétie qui applique le cercle ② sur le cercle ① et dont le rapport d'homothétie (de similitude) est donné par $\frac{r_1}{r_2}$.  - Pour certains élèves, ce rapport $\frac{r_1}{r_2}$ n'est peut-être pas évident; la composée d'une translation et d'une homothétie peut faciliter l'établissement de ce rapport.  - Ce rapport de similitude étant établi, il est facile de dégager les proportions suivantes: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2\pi r_1}{2\pi r_2} = \frac{C_1}{C_2}$ et: $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \frac{A_1}{A_2}$ Il est alors possible d'établir que:

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.3 ÉNONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques entre deux cercles. (suite)	"Deux circonférences sont entre elles comme le rapport des rayons des cercles respectifs". $\frac{C_1}{C_2} = \frac{r_1}{r_2}$ "Le rapport des aires et celui du carré des rayons respectifs forment une proportion". $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}$ - Il est peut-être intéressant et utile de découvrir d'autres relations métriques en considérant deux cercles et leurs positions relatives:  r_1 et r_2 sont respectivement les rayons du grand et du petit cercles; d est la distance entre les centres des deux cercles.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.3 ÉNONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques entre deux cercles. (suite)	- Voici un exemple : Les dents de deux roues d'engrenage ont une distance de 1 cm entre leurs crêtes et un creux de 0,85 cm. Si l'une d'elles possède 58 dents et que l'autre en a 125 et si un jeu de 5 mm est nécessaire pour minimiser le frottement, quelle devra être la distance entre le centre de ces deux roues? (Réponse: 28,33 cm) Différentes techniques de résolution de problèmes peuvent être employées pour rechercher le modèle mathématique qui permettrait de résoudre ce problème. Le modèle le plus général qui permet de résoudre ce problème est donné par: $$a = \frac{d(n_1 + n_2)}{2\pi} + c + j$$ où: a est la distance entre les centres des deux roues, d est la distance entre deux crêtes adjacentes, n_1 le nombre de dents de la première roue, n_2 le nombre de dents de la seconde roue, c les distances entre la crête et le creux d'une dent, j l'ajustement. Ce modèle permet de faire varier tous les paramètres du problème. Ce problème peut cependant se résoudre sans que l'élève arrive à un tel degré de généralisation. Comme enrichissement, on peut cependant demander à certains élèves d'y tendre. L'ordinateur pourrait être un précieux outil pour faire des simulations à l'aide de ce modèle. - Une autre relation métrique qui possède de multiples applications dans l'industrie est celle de la longueur du segment déterminé sur une tangente commune à deux cercles, dont on connaît les rayons respectifs et la distance entre les centres.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.3 ENONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques entre deux cercles. (suite)	



L'élève pourra être amené à découvrir que:

$$t = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

où: t est la longueur du segment joignant les 2 points de tangence;

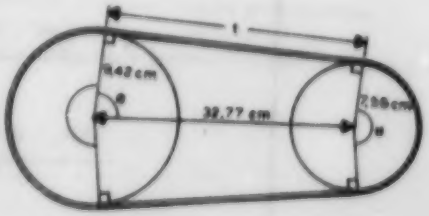
d est la distance entre les deux centres;

r_1 est le rayon du grand cercle;

r_2 est le rayon du petit cercle.

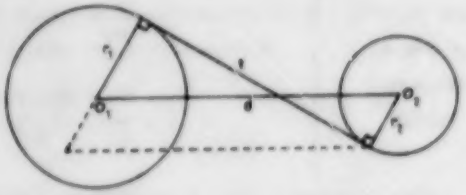
- Quelle doit être la longueur maximale d'une courroie reliant deux poulies dont les centres sont distants de 32,77 cm, si celles-ci ont 7,53 cm et 9,42 cm de rayon et si un jeu de 1,75% est nécessaire à la courroie afin de permettre un rendement maximal du couple de forces.

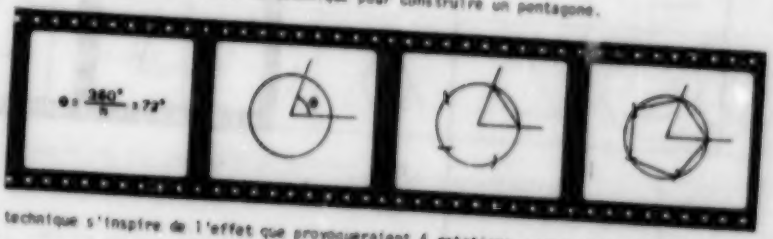
La représentation graphique pourrait être la suivante:

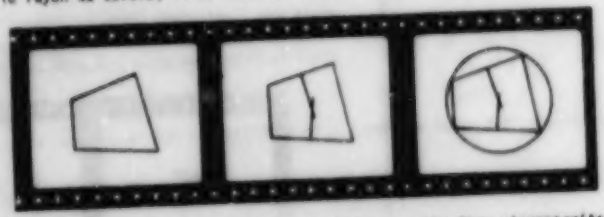
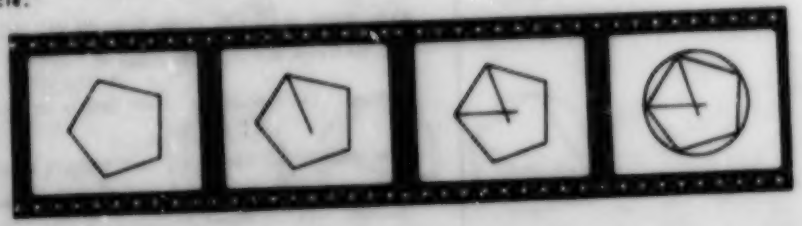


Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.3 ÉNONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques entre deux cercles. (suite)	où: ℓ représente la longueur de la courroie entre les deux points de tangence; c représente la longueur totale de la courroie; d = 32,77 cm; r_1 = 9,42 cm; r_2 = 7,53 cm. Les différentes étapes permettant d'élaborer le modèle mathématique seront: 1. $\ell = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$ 2. $\cos\theta = \frac{r_1 - r_2}{d} \rightarrow \theta = \left(\arccos \frac{r_1 - r_2}{d}\right)^\circ$ 3. $\beta = 360^\circ - 2\theta$ $= 360^\circ - 2\left(\arccos \frac{r_1 - r_2}{d}\right)^\circ$ 4. $\gamma = 2\theta$ $= 2\left(\arccos \frac{r_1 - r_2}{d}\right)^\circ$ 5. $\ell_1 = \frac{2\pi r_1 \beta}{360^\circ}$ $= \frac{2\pi r_1\left(360^\circ - 2\left(\arccos \frac{r_1 - r_2}{d}\right)^\circ\right)}{360^\circ}$ $= \frac{180\pi r_1 - \pi r_1\left(\arccos \frac{r_1 - r_2}{d}\right)}{90}$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.3 ÉNONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques entre deux cercles. (suite)	6. $s_1 = \frac{2\pi r_1 \gamma}{360°}$ $= \frac{2\pi r_1 \cdot 2\left(\arccos \frac{r_1 - r_2}{d}\right)°}{360°}$ $= \frac{\pi r_1 \arccos \frac{r_1 - r_2}{d}}{90}$ 7. $c = 1{,}0175(2\ell + s_1 + s_2)$ $= 1{,}0175\left(2\sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2} + \frac{\pi\left(180r_1 - \arccos \frac{r_1 - r_2}{d} \times (r_1 - r_2)\right)}{90}\right)$ Le modèle mathématique associé à cette situation serait: $c = 1{,}0175\left(2\sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2} + \frac{\pi\left(180r_2 - \arccos\left(\frac{r_1 - r_2}{d}\right) \times (r_1 - r_2)\right)}{90}\right)$ et appliqué au problème ci-haut, il permet de découvrir que la courroie aura une longueur maximale d'environ 120,979 cm. - La calculatrice pourrait être très utile pour résoudre un tel problème. - L'élève pourrait être amené à rechercher la longueur du segment tangentiel à deux cercles placés dans la position suivante:

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.3 ÉNONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques entre deux cercles. (suite)	 Il découvrira que cette longueur égale: $\sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$
3.3.4 INSCRIRE un polygone dans un cercle.	- Inscrire un polygone dans un cercle, c'est tracer ce polygone de façon à ce que ses sommets soient sur le cercle. - Faire remarquer à l'élève que: • tout triangle est inscriptible, car il est toujours possible de faire passer un cercle par tout triplet de points non colinéaires; • tout quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires est inscriptible.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.4 INSCRIRE un polygone dans un cercle. (suite)	- Il est possible d'inscrire un polygone régulier en s'aidant du rapporteur d'angles et du compas. Si n indique le nombre de côtés de ce polygone régulier, il s'agit de déterminer la valeur d'un angle au centre θ à l'aide de la formule: $\theta = \frac{360^\circ}{n}$; de tracer cet angle au centre, et de reporter sur le cercle n fois la corde déterminée par l'arc intercepté par l'angle au centre. Ainsi le film ci-dessous présente la technique pour construire un pentagone.  Cette technique s'inspire de l'effet que provoqueraient 4 rotations successives de 72° afin de déplacer le segment de la troisième figure. Si l'angle au centre est déterminé d'une façon imprécise, cette technique cumulera les imprécisions. Afin de minimiser cet inconvénient, il est possible de reporter $\left[\frac{n}{2}\right]$ cordes dans le sens des aiguilles d'une montre et $\left[\frac{n}{2} - 1\right]$ cordes à partir de l'autre extrémité de l'arc initial, en se déplaçant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. **Remarque:** $[x]$ signifie la valeur entière de x; ainsi $\left[\frac{5}{2}\right] = [2,5] = 2$ et $\left[\frac{5}{2} - 1\right] = [2,5 - 1] = [1,5] = 1$. - Faire observer à l'élève qu'il est toujours possible de circonscrire un cercle à un triangle donné, car par 3 points non colinéaires, on peut faire passer un et un seul cercle.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.4 INSCRIRE un polygone dans un cercle. (suite)	- De plus, il est possible de circonscrire un cercle à tout quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires. - L'illustration qui suit présente une façon de circonscrire un cercle à un polygone (quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires). Pour y arriver, il suffit de localiser le point d'intersection des médiatrices de deux côtés consécutifs; la distance entre ce point et l'un des sommets du polygone détermine le rayon du cercle; il ne reste plus qu'à tracer ce cercle.  - Faire remarquer à l'élève que tous les polygones réguliers peuvent être circonscrits à un cercle et que la technique décrite ci-dessus peut être utilisée. - Le fil ci-dessous présente un autre procédé. Il est possible de circonscrire un cercle au polygone en traçant les bissectrices de deux angles consécutifs de ce polygone; le rayon est déterminé par la distance qui sépare le point d'intersection des bissectrices et d'un sommet; il ne reste plus qu'à tracer le cercle. 

Objectifs intermédiaires	Commentaires

3.3.4

INSCRIRE un polygone dans un cercle.

(suite)

- Le tableau suivant donne l'interprétation associée à certains énoncés.

Situations	Inscrire		Circonscrire	
	un triangle dans un cercle	un cercle dans un triangle	un triangle à un cercle	un cercle à un triangle
Etat initial				
Etat final				

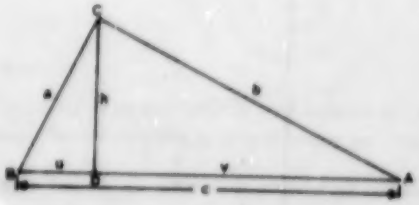
3.3.5

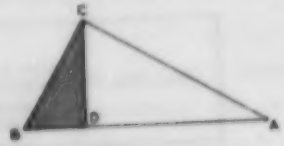
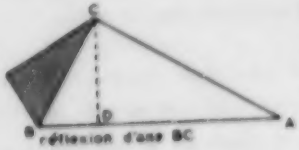
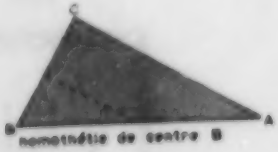
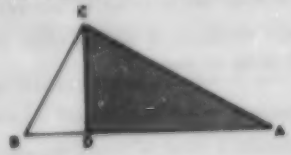
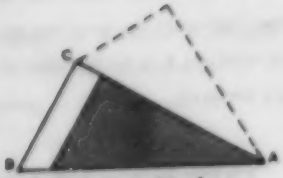
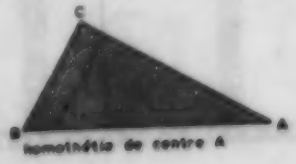
ÉNONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques relatives à la hauteur dans un triangle rectangle.

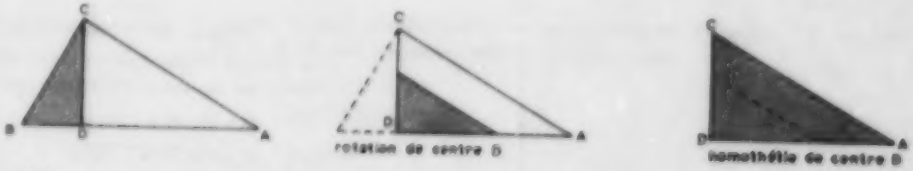
- Il est possible de déterminer ces relations en considérant l'énoncé suivant:

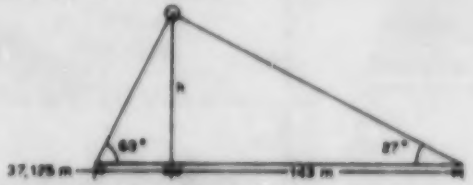
"Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse détermine des triangles semblables au premier".

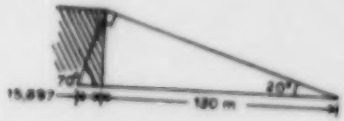
- Soit le triangle rectangle :



Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.0 ENONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques relatives à la hauteur dans un triangle rectangle. (suite)	Les triangles BDC et BCA sont semblables    d'où: $\frac{a}{c} = \frac{m}{a}$ $a^2 = mc$ (1) D'autre part, les triangles CDA et BCA sont semblables.   d'où: $\frac{b}{c} = \frac{n}{b}$ $b^2 = nc$ (2) 

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.5 ÉNONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques relatives à la hauteur dans un triangle rectangle. (suite)	Ces deux relations peuvent s'énoncer ainsi: "Dans un triangle rectangle, un côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse entière". Des relations (1) et (2), on déduit celle de Pythagore. En effet, en additionnant (1) et (2), on obtient: $a^2 + b^2 = ac + vc$ $a^2 + b^2 = c(u + v)$ $a^2 + b^2 = c \cdot c$ $a^2 + b^2 = c^2$ (3) Les triangles BDC et CDA sont semblables.  rotation de centre D homothétie de centre D d'où: $\frac{h}{v} = \frac{u}{h}$ $h^2 = uv$ (4) Cette relation (4) s'énonce: "Dans un triangle rectangle la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse". - Il est important que l'élève découvre ces relations à partir d'une recherche des proportions qui permettent d'établir les triangles rectangles semblables.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.5 ÉNONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques relatives à la hauteur dans un triangle rectangle. (suite)	- Ici encore, il serait pertinent d'utiliser des exemples d'applications puisés dans le quotidien de l'élève. Voici quelques situations: Exemple 1: Deux observateurs se font face et regardent un ballon selon des angles d'élévation de 27^0 et 63^0. Quelle est la hauteur du ballon si ces deux observateurs sont respectivement à 143 m et 37,125 m de la verticale du ballon. La situation pourrait se représenter ainsi:  Le triangle déterminé par le ballon et les deux observateurs est rectangle car les angles d'élévation sont complémentaires. Alors: $h^2 = 37{,}125\ m \times 143\ m$ $h = \sqrt{37{,}125\ m \times 143\ m}$ $h = 72{,}862\ m$ Le ballon est à une altitude de 72,862 mètres. Exemple 2: Un observateur veut connaître la hauteur d'un édifice. Sous un premier angle d'élévation de 20^0, il est à 120 m de l'édifice, tandis que lorsqu'il observe l'édifice sous un angle d'élévation de 70^0, il est à 15,897 m. Avec ces renseignements, peut-il calculer la hauteur de l'édifice sans utiliser les notions de trigonométrie?

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.5 ÉNONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques relatives à la hauteur dans un triangle rectangle. (suite)	La situation peut être présentée par: où, à la suite d'une réflexion, on se servant de la hauteur comme axe de symétrie:  Ici encore, le grand triangle ainsi formé est rectangle, car les angles de 20^0 et de 70^0 sont complémentaires. On établit encore: $h^2 = 120\ m \times 15,897\ m$ $h = \sqrt{120\ m \times 15,897\ m}$ $h = 43,677\ m$ La hauteur de l'édifice est de 43,677 mètres.

Annexe

Notes historiques sur la trigonométrie

UN POINT DE VUE HISTORIQUE

Si on utilise le mot "trigonométrie" pour désigner la science étudiée actuellement sous ce nom, on peut alors situer son origine au 17e siècle, soit après le développement accéléré d'une algèbre symbolique satisfaisante.

Si on utilise le mot "trigonométrie" pour désigner cet appendice géométrique de l'astronomie, utilisant certaines fonctions d'angles, on peut situer son origine à l'époque d'Hipparque (140 av. J.-C.) même si on a pu trouver des traces beaucoup plus anciennes de son utilisation).

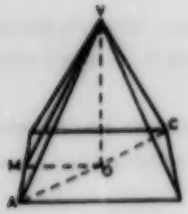
Si on utilise le mot "trigonométrie" pour parler strictement et littéralement de mesures d'angles, on pourra alors situer son origine beaucoup plus loin encore, soit entre les années 2000 et 1000 av. J.-C.

Il est important de situer cette science en fonction de son origine la plus reculée, tout en insistant sur l'idée de fonction d'angle.

EN ÉGYPTE

On a découvert dans le papyrus AHMES (1500 av. J.-C.) la description de cinq problèmes relatifs aux diverses mesures des pyramides. Quatre d'entre eux font référence au concept de SEQT d'un angle. Ahmes ne fut pas très précis en ce qui a trait à la signification exacte de cette expression, mais les experts croient que le SEQT de la pyramide illustrée ci-après était équivalent à la cotangente de l'angle OMV. Les pyramides égyptiennes étaient construites de façon que l'angle OMV et l'angle OAV soient des angles constants. (L'angle OMV était approximativement égal à 52 degrés et l'angle OAV était approximativement égal à 42 degrés).

Certains auteurs croient que le mot "SEQT" était équivalent au mot "rapport".



À BABYLONE

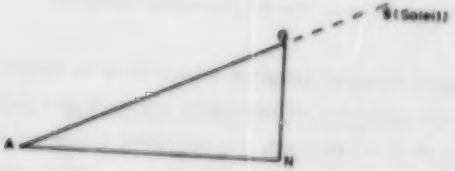
Contrairement aux croyances populaires, il semble que les Babyloniens connaissaient les travaux faits par les Égyptiens sur la trigonométrie. En réalité, les Babyloniens se sont surtout intéressés à l'astronomie. Le calendrier astrologique du roi Sargon (2800 av. J.-C.) et une table des éclipses de la lune (747 av. J.-C.) en sont d'excellents exemples. Les travaux des Babyloniens ne furent aucunement axés sur la trigonométrie, mais ces travaux utilisèrent parfois certaines mesures d'angles.

LE GNOMON

Hérodote (450 av. J.-C.) racontait que les Grecs avaient construit leur cadran solaire en se basant sur celui des Babyloniens. Cela est sûrement vrai, car les Égyptiens utilisaient déjà le principe du cadran solaire en l'an 1500 av. J.-C. et on sait que les Babyloniens tenaient cette connaissance des Égyptiens.

Quelle relation existe-t-il entre le cadran solaire et la trigonométrie?

En fait, le cadran solaire est un instrument d'observation astronomique.



Un bâton GN, que les Grecs appelèrent un GNOMON, est planté dans le sol et on peut, par temps ensoleillé, observer une ombre AN. Cette ombre varie selon l'heure du jour et le temps de l'année. Comme le gnomon est constant, la longueur de AN (à midi) varie selon la valeur de l'angle A (soit la cotangente). (Aucun texte n'indique le nom que l'on donnait à un tel concept.)

EN CHINE

Dans le Chou-pei Suan-king (1105 av. J.-C.), on utilisait fréquemment le triangle rectangle pour mesurer des distances, des hauteurs et des profondeurs; et il est plus que probable que les rapports des côtés étaient fort connus.

On y a raconté que "la connaissance vient de l'ombre et l'ombre vient du gnomon"; ainsi une trigonométrie plane primitive était donc connue en Chine au deuxième millénaire avant la naissance du Christ.

Encore là, il n'est pas évident que les Chinois utilisaient des noms précis pour certaines fonctions d'angles. Cependant, les intérêts astronomiques des Chinois, comme pour beaucoup d'autres peuples anciens, exigeaient la mesure de différents angles.

EN GRÈCE

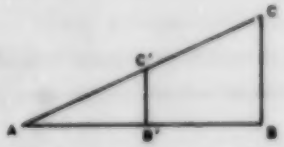
Quand THALÈS mesura la hauteur des pyramides au moyen de son ombre, il utilisa ce que l'on peut maintenant appeler "le

coup de l'ombre" ou bien "l'estimation par la mesure de l'ombre" (The shadow reckoning).

Dans son "Banquet des sept sages", Plutarque, parlant de Nilax, l'un de ses personnages, s'adresse à Thalès et il lui dit: "Non seulement il vous honore, mais il vous admire pour vos remarquables travaux et particulièrement pour cette invention par laquelle, avec peu d'efforts et sans l'aide d'instruments mathématiques, vous avez trouvé avec autant de précision la hauteur des pyramides. Vous plantez votre gnomon (bâton) à l'extrémité de l'ombre de la pyramide et se trouvent ainsi construits deux triangles formés par les rayons du soleil; vous avez alors montré que le rapport d'une ombre sur l'autre est égal au rapport de la hauteur de la pyramide sur la hauteur du gnomon".

Essentiellement, cette mesure des hauteurs suppose que l'on possède les connaissances suivantes:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$$



Pour nous, du 20^{e} siècle, cela nous suggère qu'il s'agit de la tangente, soit: $\tan A = \frac{BC}{AB}$, mais il n'est pas évident qu'il en fût ainsi à l'époque de Thalès.

Nous savons maintenant que, plusieurs siècles plus tard, $\overline{AB}$ fut appelé l'<u>ombra recta</u> (ombre de droite), et c'est ainsi que la relation (ou le rapport) de $\overline{AB}$ sur $\overline{BC}$ fut appelé "le coup de l'ombre" (ou l'estimation par la mesure de l'ombre).

On a écrit qu'Anaximandre (575 av. J.-C.) érigea, près de Sparte, le premier gnomon érigé en Grèce. Ce fut probablement un obélisque planté perpendiculairement à la surface du sol de la planète. Cet obélisque servit d'abord à déterminer la ligne des méridiens; mais surtout, comme ce fut le cas en Égypte et à Babylone, cela servit à mesurer la longueur de l'année, des saisons et

du jour, en plus de donner l'heure du jour.

ARISTARQUE DE SAMOS

Le pas suivant le plus important dans le développement de la trigonométrie fut réalisé par l'astronome Aristarque de Samos (260 av. J.-C.). Il essaya de calculer les distances terre-lune et terre-soleil, ainsi que le diamètre de chacun. Ses raisonnements d'ordre géométrique furent très exacts, mais ses instruments de mesure étaient si imparfaits qu'il obtint des mesures peu précises; il affirma que le rapport de la distance terre-lune à la distance terre-soleil était situé entre 1/18 et 1/20. Dans les calculs de sa preuve, il utilisa des rapports qui suggérèrent l'idée de tangente d'un angle.

HIPPARQUE

Théon d'Alexandrie affirme qu'Hipparque, le plus grand des astronomes grecs, écrivit 12 livres sur le calcul des mesures des cordes correspondant à divers angles, mais il n'existe plus aucune trace de ces livres. Dans un écrit qui est parvenu jusqu'à nous, Hipparque affirme lui-même qu'il est en train d'effectuer de tels calculs; on peut alors dire qu'Hipparque fut le père de la trigonométrie. C'EST LE GRAND DÉBUT. Il connaissait les formules de $\sin(A \pm B)$ et $\cos(A \pm B)$.

On sait aussi qu'à cette époque, et même avant, pour résoudre un triangle, on l'inscrivait d'abord dans un cercle. Les côtés étaient alors considérés comme des cordes et étaient calculés en fonction des valeurs du rayon. Ainsi, la table des cordes devint un instrument d'une haute valeur.

On sait aussi qu'Hipparque résolvait des problèmes dans lesquels il utilisait un équivalent de la formule $\tan b = \cos A \tan c$, où $\angle C = 90^\circ$. Lui et Ptolémée connaissaient la relation que l'on exprime aujourd'hui par $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

HÉRON D'ALEXANDRIE

Héron démontre beaucoup d'ingéniosité dans ses calculs sur le triangle et, en Égypte, il était très familier avec l'art de l'arpentage. On ne peut cependant pas dire qu'il comprenait et qu'il appréciait l'art de la trigonométrie. Il utilisa diverses règles qui servaient à calculer l'aire de polygones réguliers, et ce, en l'exprimant dans chaque cas par le produit du carré d'un côté par un certain nombre; ces règles étaient en quelque sorte les précurseurs ou les ancêtres des fonctions trigonométriques.

A_n est l'aire d'un polygone régulier à n côtés et S_n est la mesure du côté:

$A_3 = \frac{13}{30} S_3^2$ $\quad A_7 = \frac{43}{12} S_7^2$ $\quad A_{11} = \frac{45}{4} S_{11}^2$

$A_4 = S_4^2$ $\quad A_8 = \frac{29}{6} S_8^2$

$A_5 = \frac{5}{3} S_5^2$ $\quad A_9 = \frac{51}{8} S_9^2$

$A_6 = \frac{13}{5} S_6^2$ $\quad A_{10} = \frac{15}{2} S_{10}^2$.

Comme $A_n = \frac{1}{4} n S_n^2 \cot \frac{180^\circ}{n}$, on peut supposer qu'Héron connaissait le concept de $\cot \frac{180^\circ}{n}$; cependant, rien ne confirme, dans ses coefficients, une telle connaissance.

PTOLÉMÉE

Les contributions personnelles de Ptolémée à l'évolution de la trigonométrie sont très minimes, et ce, si même elles existent. Cependant, nous lui sommes fort redevables de son sommaire, dans l'Almageste, des différents théorèmes connus d'Hipparque. Comme beaucoup d'autres auteurs grecs, il utilisa le concept de cordes d'angles au lieu de sinus; cependant, l'idée de sinus était bien installée dans son esprit. Il continua la rédaction de la table des cordes commencée par Hipparque; il semble que ses calculs furent la source principale des tables de sinus utilisées par d'anciens auteurs Hindus.

LA TRIGONOMÉTRIE HINDU

Même si les Hindus avaient produit le Surya Siddhanta et même si ce travail traitait d'astronomie ancienne,

> "ce travail donnait d'ailleurs une table des demi-cordes, apparemment basée sur les travaux de Ptolémée, et montrait des signes évidents de connaissance des fonctions trigonométriques".

il fallut attendre l'époque d'Aryabhata, qui écrivit son Aryabhatiyam, pour voir émerger dans la littérature orientale un traité purement mathématique contenant des traces précises de fonctions d'angles. Dans ces travaux, on y parle de demi-cordes, comme le Surya Siddhanta l'avait fait auparavant.

En fait, les Hindus se contentèrent de continuer à construire des tables.

LA TRIGONOMÉTRIE ARABE ET PERSE

Comme leurs prédécesseurs, les Arabes et les Perses s'intéressaient à la trigonométrie à cause de son utilité dans la résolution de problèmes relatifs à l'astronomie. Le plus grand astronome arabe fut Al-Battegnius, qui fut à juste titre considéré comme le Ptolémée de Bagdad. Comme les Hindus, il utilise des demi-cordes au lieu de cordes. Il découvrit également une formule permettant de calculer l'altitude du soleil, soit la formule:

$$x = \frac{L \sin(90^\circ - \theta)}{\sin \theta}$$

Cette formule est équivalente à:

$$x = L \cot \theta$$

Abû'l-Wafâ calcula les différentes valeurs inscrites dans les tables avec un soin beaucoup plus grand que ses prédécesseurs et il organisa systématiquement les théorèmes et les différentes preuves existant en trigonométrie.

Puis ce fut l'époque de Nasîr ed-dîn Al-Tûsî, un astronome perse, qui écrivit le premier traité de trigonométrie dans lequel la trigonométrie apparaissait comme une véritable science.

Par la suite, Ulugh Beg de Samarkand, un astronome célèbre, fit calculer et compiler des tables de sinus et de tangentes qui contribuèrent grandement à l'avancement de cette science.

EN ESPAGNE

Avec le déclin de Bagdad, l'étude de la trigonométrie prit beaucoup d'importance en Espagne. Les plus importants travaux furent effectués par les astronomes Ibn Al-Zargâla et Jabir ibu Aflah qui construisirent une autre série de tables. Au 13^{e} siècle, Alfonso X dirigea des travaux de construction de tables à Tolède; il s'agit d'un assortiment de tables qui furent longtemps utilisées par les astronomes, notamment aux 14^{e} et 15^{e} siècles.

PEURBACH ET RÉGIOMONTANUS

Au 14^{e} siècle, les Anglais connaissaient les travaux des Arabes en trigonométrie. Au 15^{e} siècle, Peurbach et son élève Régiomontanus compilèrent une nouvelle table des sinus. Le travail de Régiomontanus, en particulier, contribua à l'identification de la trigonométrie comme une science indépendante de l'astronomie.

Il compila lui-même de nouvelles tables, et nombreux sont ceux qui disent de lui qu'il aurait établi les bases réelles qui contribuèrent à de nombreux travaux sur la trigonométrie plane.

L'INFLUENCE DES LIVRES IMPRIMÉS

Le premier livre imprimé sur la trigonométrie portait le nom de "Tabula Directionum" et il fut rédigé par Régiomontanus; il fut publié à Nürenberg en 1485. Le premier livre dans lequel les six fonctions trigonométriques étaient définies comme étant des fonctions d'angle au lieu d'un arc (et souvent sous forme de rapport), fut le "Canon Doctrinae Triangulorum", rédigé par Rheaticus et publié à Leipzig en 1551; et ce, même s'il s'accordait aucun nom précis aux fonctions telles que sin θ, cos θ et csc θ, sauf les noms de perpendiculum, basis et hypotenusa. Rheaticus fut le premier à adopter un arrangement semi-quadrantal des tables, en donnant les fonctions de 0^0 à 45^0 et en utilisant par la suite les co-fonctions. Il exprima sin nθ en termes de sin θ, sin(n - 1)θ et cos(n - 2)θ, un sujet élaboré par la suite par Jacques Bernoulli (1702).

VIÈTE ET PITISCUS

Viète apporta une grande contribution dans le traitement analytique de la trigonométrie. C'est avec lui que débuta le développement systématique du calcul dans les triangles, à l'aide des six fonctions trigonométriques.

Pitiscus publia en 1595 un important traité de trigonométrie dans lequel il corrigea les tables de Rheaticus, tout en modernisant le traitement de ce sujet. C'était la première fois qu'un livre portait le titre de Trigonométrie.

EN ANGLETERRE

En 1658, John Newton publia un traité sur la trigonométrie qui, tout en étant largement basé sur les travaux de Gellibrand, était l'ouvrage le plus complet à être publié sur cette question.

Newton et Gellibrand firent preuve d'anticipation en donnant les tables avec des divisions centésimales d'un angle.

John Wallis (1616-1703) contribua au développement de la trigonométrie en traduisant les formules obtenues sous forme d'équations, au lieu de s'en tenir à des proportions. Cela permit de faire de grands pas dans le traitement analytique de la trigonométrie.

LA TRIGONOMÉTRIE ANALYTIQUE

Au 17e siècle, à cause des avantages apportés par la création d'un symbolisme algébrique en Europe, la trigonométrie devint une science analytique, et cela lui permit d'entrer dans le champ des hautes sciences mathématiques.

En Orient, la trigonométrie fut tributaire du "coup de l'ombre" (Shadow Reckoning), jusqu'à ce que les Jésuites apportèrent en Chine les découvertes faites en Europe au début du 17e siècle (1600).

Nous pouvons clore ici les débuts de cette science et regarder maintenant de près les principaux concepts que l'on peut rencontrer en trigonométrie élémentaire.

LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

LE SINUS

La fonction la plus évidente et la plus naturelle pour les premiers astronomes était reliée à la mesure de la corde correspondant à un arc de cercle dont la mesure du rayon était parfaitement arbitraire.

Comme ils ne possédaient pas de notations utiles et efficaces pour les fractions, il n'était guère commode de prendre un rayon qui causerait des difficultés dans les fractions, pour le calcul de longueurs approximatives des différentes cordes. Un rayon commode, comme 60, fut choisi; ainsi la mesure de la corde correspondant à un arc donné, cet arc étant considéré comme une ligne, devint la première fonction étudiée par les astronomes.

La première table des cordes fut compilée par Hipparque (140 av. J.-C.) mais cette table s'est perdue et nous ne possédons aucune information sur son degré de précision et sur son étendue.

La deuxième table des cordes fut compilée par Ménélaus (100) mais elle fut également perdue; cependant certains de ses travaux sur la trigonométrie sphérique nous confirme l'utilisation d'une telle fonction.

La troisième table des cordes (la plus importante) fut l'oeuvre de Ptolémée (150). Il divisa le cercle en 360 degrés et le diamètre en 120 parties égales; cette décision de 120 parties égales lui fut sans doute suggérée par le fait que le nombre 120 a un grand nombre de facteurs différents, et aussi par le fait que 3 × 120 était égal à 360 (ceci étant relié à l'ancien usage de 3 comme valeur de π).

Influencé autant par Hipparque que par les Babyloniens, il utilisa une subdivision sexagésimale (fractions exprimées en soixantièmes), le rayon étant divisé en 60 moirai (μ) et chaque moira en 60 minutes, et ainsi de suite.

L'ORIGINE DU SINUS

Un premier nom spécial que l'on accorda à cette fonction (que l'on appelle aujourd'hui le sinus) est utilisé dans les travaux d'Aryabhata (510). Même s'il y parle au début de demi-corde (half-chord), il utilisa par la suite l'abréviation jya ou jiva, qui signifie corde. Il poursuivit les travaux de Ptolémée en divisant le cercle en 360 degrés et il composa une table des sinus.

À cause des efforts énormes que les Hindus ont déployés pour construire de telles tables, il est fort probable qu'ils étaient au courant des relations que l'on exprime aujourd'hui par les expressions suivantes:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta + \text{versin}^2\theta = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$$

etc.

La table des sinus établie par Aryabhata fut reproduite par Brahmagupta en 628; Bhaskara (1150) dans son Siddhanta Siromani décrivit une méthode pour construire une table des sinus pour chaque degré.

UN NOM POUR LE SINUS

Le nom de jya donné au sinus par Aryabhata est l'équivalent du kramajya utilisé par Brahmagupta; il s'agit en fait du sinus rectus (sin) par opposition au sinus versus (arc sin). Lorsque ce concept fut introduit en Arabie, il prit le nom de karaja. C'est le même nom qu'utilisa Al-Khowârizmî dans son Sindhind ainsi que dans les textes produits par l'Espagnol Ibn Al-Zarqâla (1050).

Les arabes utilisèrent le mot jîbe, qui est phonétiquement un dérivé du mot hindu jya. La prononciation de ce mot permettait de lire jaib, qui signifie "repli", d'où ...

LE SINUS CHEZ LES LATINS

C'est en 1150 que le mot sinus fut utilisé pour la première fois et ce, par Gherardo de Cremone; il utilisa le mot sinus à la place de jaid, dont le sens latin est à peu près l'équivalent, chacun des deux mots signifiant "un repli". Cet usage fut adopté par la majorité des mathématiciens européens. Le mot "corde" fut aussi par la suite utilisé dans le même sens.

En 980, Abû'l-Wefâ avait clairement défini le sens des mots "corde", "sinus" et "arc sinus". Il avait aussi construit une table des sinus pour chaque 15 minutes. Un peu plus tard, Ibn Al Zarqâla compila une table des sinus et des sinus versus, en utilisant un rayon arbitraire de 150 minutes, et aussi, comme Ptolémée, 60 mairai, afin de ne pas confondre les unités de mesure de longueur avec les unités de mesure d'angle.

D'AUTRES NOMS POUR LE SINUS

Le terme "sine" ne fut pas immédiatement universellement reconnu, car Rheticus, en 1560, utilisait encore le terme "perpendiculum".

Certains utilisaient aussi les termes "sinus totus" et "sinus perfectus", qui étaient l'équivalent de sin 90^0.

DES ABRÉVIATIONS POUR LE TERME SINUS

Le premier auteur qui utilisa une abréviation satisfaisante du terme sinus fut Girard en 1626. Il remplaça l'expression "sinus de A°" par "A" et l'expression "cosinus de A°" par "a".

Cependant, déjà en 1624, Gunter avait utilisé la contraction SIN dans plusieurs de ses dessins, même si l'utilisation de cette abréviation n'apparaissait pas par la suite dans ses travaux.

À Londres, en 1631, Richard Norwood publia un livre sur la trigonométrie, dans lequel il dit: "Dans ces exemples, s signifie sinus, t signifie tangente, sc signifie complément de sinus, tc signifie complément de tangente, sec signifie sécante". Le premier auteur à utiliser le symbole sin pour sinus est le mathématicien français Hérigone, en 1634. En 1643, Cavalieri suggère Si et en 1647, dans un de ses livres, Oughtred utilisa le symbole S.

En 1654, Seth Ward, un professeur d'astronomie de Oxford, lui-même un élève de Oughtred, utilisa s pour sinus et S pour le "sinus complementi".

Les symboles:

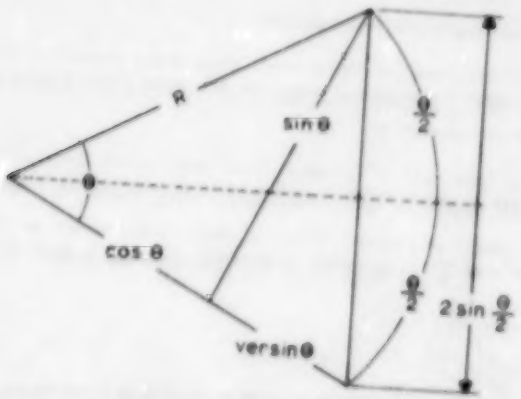
$$\sin^{-1}x,\ \cos^{-1}x,\ \text{etc.}$$

pour arc sin x, ar: cos x, etc., furent suggérés par l'astronome anglais Sir John F.W. Herschel, en 1813.

LE SINUS VERSUS

La deuxième fonction qui intéressa les astronomes ne fut pas le cosinus, même si cela peut nous sembler étrange, mais ce fut le sinus versus. Cette fonction, que l'on mentionne généralement lorsque l'on parle du sinus, fut signalée pour la première fois dans le Surya Siddhanta (400), puis par la suite dans les écrits d'Aryabhata, qui fut le premier à compiler les tables d'une telle fonction:

$$\text{versin } \theta = 1 - \cos \theta$$



De l'Inde, ce concept se transmit ensuite aux Arabes et à Albatagnius (920); il utilisait cependant l'expression "chorda versa" à la place de "sinus versus". Les Arabes parlèrent aussi de "sahem" qui devint en latin "sagitta", un terme utilisé par la suite par Fibonacci (1220) pour désigner le "sinus versus". En 1558, Maurol ce utilisa l'expression "sinus versus major de α" pour désigner "sinus versus (180° - α)".

LE COSINUS

Quand le triangle rectangle devint la base de la trigonométrie, il devint commode de parler de sinus du complément d'un angle. C'est ainsi qu'est apparu le kotijya d'Aryabhata (510), même si le sinus (90° - α) était fréquemment utilisé.

En 1120, Platon de Tivoli utilisa le terme "chorda residui" pour parler du complément d'un angle. En 1463, Régiomontanus utilisa l'expression "sinus rectus complementi". En 1551, Rheticus utilisait le mot "basis"; en 1579, Viète parlait de "sinus residuae" et en 1609, Magini utilisa l'expression "sinus secundus".

En 1620, Edmund Gunter suggéra l'expression co.sinus, que John Newton (1658) s'empressa de modifier en "cosinus". Cette abréviation reçut une appréciation fort généralisée.

En 1643, Cavalieri utilisa le symbole "Si.2" et en 1706, William Jones utilisa le symbole "S".

En 1674, Jonas Moore parla de "Cos.", le symbole généralement adopté par la majorité des auteurs, par la suite.

LA TANGENTE ET LA COTANGENTE

Pendant que les astronomes se préoccupaient de la corde et du sinus et s'évertuaient à développer ces concepts, les mesures les plus utiles et les plus élémentaires de hauteur et de distances nécessitaient l'utilisation des concepts de tangente et de

cotangente (soit le gnomon et l'ombre).

Il est possible qu'Ahmes (1650 av. J.-C.) connaissait la tangente, mais peu importe, car nous savons que "l'estimation par la mesure de l'ombre" (shadow reckoning) était un principe utilisé pour effectuer diverses mesures (particulièrement des hauteurs).

Contrairement au sinus et au cosinus, les concepts de tangente et de cotangente furent développés en même temps, étant donné la relation étroite qui reliait le gnomon et l'ombre.

Les Grecs, malgré tout, n'utilisèrent guère ces fonctions d'angle, sauf lorsque Thalès mesura la hauteur des pyramides à l'aide des ombres et de la théorie des triangles semblables.

L'UMBRA RECTA ET L'UMBRA VERSA

Le Surya Siddhanta (400) et plusieurs autres textes hindus parlent de l'ombre, particulièrement en reliant ce concept à diverses lois en astronomie, mais ce furent les Arabes qui les premiers utilisèrent ce concept comme une fonction.

Ce fut Ahmed ibn Abdallâh, appelé habituellement Habash Al-Hasîb, "le calculateur", qui, en 880, construisit la première table de tangentes et de cotangentes. Les auteurs arabes distinguaient l'ombre rectiligne, traduit en latin par "umbra recta", et le gnomon, placé perpendiculaire au plan horizontal (comme les cadrans solaires) ou perpendiculaire à un mur vertical (comme les cadrans solaires sur un édifice). Ces termes disparurent vers la fin du 10^{e} siècle.

LA TABLE DES OMBRES

Le premier auteur qui construisit une table des ombres fut Albotegnius (920); cette table donnait la valeur de la cotangente pour chaque degré du quadrant.

$$u = L \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{pour } \theta = 1^\circ, 2^\circ, \ldots$$

L étant la longueur du gnomon.

En 980, Abûl-Wafâ construisit une table des tangentes pour chaque 15 minutes. À la même époque, on construisit une table des cotangentes pour chaque 10 minutes.

Sous la direction de Ulugh Beg (1435), on prépara une table des tangentes pour chaque minute, de 0° à 45°, et pour chaque 5 minutes, de 45° à 90°; la table des cotangentes fut cependant construite pour chaque degré seulement.

NOMS ET SYMBOLES

Même si Rheticus (551) n'utilisa pas les termes tangente et cotangente, il les définit tou. de même comme un rapport et il compila une table fort complète de ces deux fonctions.

Viète appela la tangente le "sinus foecundarum" (ou le prosinus ou l'ensinus). C'est en 1583 que Thomas Fincke utilisa pour la première fois le terme "tangent" à la place de l'expression "umbra versa". Ce nom fut adopté par Pitiscus en 1595 et, grâce à la réputation de ce grand écrivain, le terme fut accepté par la majorité des auteurs.

En 1609, Magini utilisa l'expression "tangens secunda" pour la cotangente.
En 1620, Edmund Gunter utilisa le terme "cotangens" pour désigner cette fonction.
En 1643, Cavalieri utilisait les symboles "Ta" et "Ta.2".
En 1657, Oughtred utilisa les symboles "t arc" et "t co arc".
En 1683, Sir Charles Scarburgh utilisa les symboles "t." et "ct.".
En 1693, Wallis utilisa les symboles "T" et "t".

L'abréviation "tan" fut utilisée pour la première fois par Girard en 1626 et "cot" fut suggéré par Jonas Moore en 1674; cependant, à cette époque, aucun symbolisme n'était universellement reconnu pour désigner la tangente et la cotangente.

LA SÉCANTE ET LA COSÉCANTE

Étant donné que les astronomes et les arpenteurs des temps anciens n'avaient aucun besoin des concepts de sécante et de cosécante, sauf en ce qui concerne l'hypoténuse d'un triangle rectangle, ces fonctions furent élaborées beaucoup plus tardivement que les autres.

La sécante fut utilisée, semble-t-il, pour la première fois par Al-Marvazi (860); les deux fonctions apparurent ensuite dans les travaux d'Abû'l Wefâ (980), mais elles ne portaient pas de noms précis.

C'est au 15^{e} siècle, lors de la fabrication des tables pour les navigateurs, que les concepts de sécante et de cosécante prirent forme. Copernic (1542) connaissait le concept de sécante; il l'appelait d'ailleurs "hypotenusa" et il avait compilé des valeurs associées à ces fonctions. Mais ce fut son élève Rhaeticus qui, le premier, ajouta ces fonctions à ses tables imprimées. La sécante et la cosécante apparurent avec les 4 autres fonctions dans son "Canon doctrinae triangulorum" paru à Leipzig en 1551, même si Rhaeticus parle d'hypotenusa pour désigner ces fonctions. Le nom de la cosécante est apparu dans son oeuvre "Opus Palatinum", publiée après sa mort, en 1596. En 1558, Maurilico avait inclu dans ses tables les sécantes de 0° à 45°.

NOMS POUR LA SÉCANTE ET LA COSÉCANTE

Le mot sécante fut utilisé pour la première fois par Fincke en 1583 et, même si Viète en 1593 utilisait le mot "transsinuosa", le nom persista et il fut adopté par la majorité des mathématiciens de l'époque. La cosécante fut d'abord appelée "secans secunda" par Magini (1592) et par Cavalieri (1643). En 1613, Pitiscus donna les noms de sécante et de cosécante dans ses tables.

En 1643, Cavalieri utilisa les symboles "Se" et "Se.2".

En 1657, Oughtred utilisa les symboles "sec arc" et "sec ca arc".

En 1693, Wallis utilisa les symboles "s" et "s".

C'est en 1626 que Girard suggéra le symbole "sec", qui fut adopté par la majorité. Même aujourd'hui, il n'y a pas de symbole universel pour la cosécante, car "cosec" et "csc" sont tous les deux utilisés.

RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS

Les Grecs savaient que:

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

et $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(ce qui est déduit de la relation de Pythagore). Abû'l Wafâ connaissait les formules suivantes:

$$\frac{\tan\theta}{1} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \frac{\cot\theta}{1} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \sqrt{1 + \tan^2\theta} \quad \text{ou} \quad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$\csc\theta = \sqrt{1 + \cot^2\theta} \quad \text{ou} \quad \csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

Rhaeticus savait que:

$$\frac{\sec\theta}{1} = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\csc\theta}{1} = \frac{1}{\sin\theta}$$

Viète découvrit que:

$$\frac{1}{\sec\theta} = \frac{\cos\theta}{1} = \frac{\sin\theta}{\tan\theta}$$

$$\frac{\csc\theta}{\sec\theta} = \frac{\cot\theta}{1} = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\frac{1}{\csc\theta} = \frac{\cos\theta}{\cot\theta} = \frac{\sin\theta}{1}$$

EN EUROPE

Celui qui, le premier, compila des tables en Europe fut Régiomontanus (1546). En fait il n'y eut aucun développement original dans les méthodes de calcul depuis l'époque de Ptolémée jusqu'à ce que Fourrier découvre des méthodes modernes de calcul basées sur les séries (1812).

En général, toutes les anciennes tables furent construites avec un rayon de 60, défini par Ptolémée; c'est ainsi que le sinus totus, ou sin 90^0, était égal à 60. Ceci était dû au fait qu'il était essentiel d'éviter les fractions, avant que l'on ne découvrit le système décimal.

Le premier qui adopta la forme sin $90^0 = 1$ fut Jobst Bürgi (1600); mais ses tables, compilées sur cette base, ne furent pas très développées.

LES PREMIÈRES TABLES

En 1533, Apianus publia une table des sinus dans laquelle le rayon était divisé en décimales.

En 1551, Rhaeticus publia une table des six fonctions basée sur un arrangement semi-quadrantal, calculée pour chaque 10 minutes et ce, à une précision de 7 chiffres.

En 1579, Viète publia une extension des tables de Rhaeticus, mais pour chaque minute.

En 1594, Blundeville publia une table des six fonctions.

En 1596, Rhaeticus publia d'autres tables, calculées pour chaque 10 secondes et ce, jusqu'à 10 décimales.

CERTAINS THÉORÈMES BIEN CONNUS

L'ADDITION DES SINUS

Les Grecs savaient que $\sin(\theta \pm \theta') = \sin\theta\cos\theta' \pm \cos\theta\sin\theta'$. Il est probable que Hipparque (140) la connaissait particulièrement à cause de ses divers travaux sur les cordes. Il était certainement connu de Ptolémée, car il porte souvent son nom.

Bhâskara (1150) le signala dans ses écrits. En 980, Abû'l-Wafâ le signala sous la forme:

$$\sin(\theta \pm \theta') = \sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\theta\sin^2\theta'} \pm \sqrt{\sin^2\theta' - \sin^2\theta\sin^2\theta'}$$

LES FONCTIONS DE MULTIPLES D'ANGLES

La formule $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ est un corollaire du cas général $\sin(\theta + \theta')$. Elle fut signalée pour la première fois par Abû'l-Wefâ sous la forme:

$$\text{crd} \ \theta : \text{crd} \ \tfrac{1}{2}\theta = \text{crd}(180^0 - \tfrac{1}{2}\theta) : r$$

Viète (1591) fut le premier à démontrer les formules de:

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2\theta \sin \theta - \sin^3\theta$$

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3 \sin^2\theta \cos \theta$$

Rhaeticus trouva la relation:

$$\cos n\theta = \cos(n-2)\theta - 2 \sin \theta \sin(n-1)\theta$$

En 1676, Newton trouva la relation:

$$\sin n\theta = n \sin \theta + \frac{(1-n^2)n}{3!} \sin^3\theta + \ldots$$

FONCTION DE LA DEMIE D'UN TRIANGLE

Ptolémée connaissait le sinus de la demie d'un angle, exprimé sous la forme de la demie d'une corde. Il est probable qu'Hipparque (140) et il est certain que Varâ-Hamihira savaient que:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

Euler (1748) découvrit que:

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\cot 2\theta = \frac{\cot \theta - \tan \theta}{2}$$

Lambert (1765) découvrit que:

$$\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

LE THÉORÈME DES SINUS

L'importante relation

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

était connue de Ptolémée, même s'il l'exprimait en termes de cordes.

$$a = \frac{c.\text{cord}2A}{120}$$

Nasîr ed-dîn (1250) la définit avec clarté.

Finalement, ce fut Régiomontanus (1464) qui lui donna sa véritable forme.

LE THÉORÈME DES COSINUS

Le fait que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ est essentiellement un fait géométrique découle du théorème d'Euclide.

Au début, Viète (1593) écrivit que: $\frac{2ab}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{1}{\sin(90^0 - C)}$.

Ensuite, W. Snell (1627) écrivit que: $\frac{2ab}{c^2 - (a - b)^2} = \frac{1}{1 - \cos C}$.

LE THÉORÈME DES TANGENTES

Le fait que $\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A + B)}{\tan \frac{1}{2}(A - B)}$ était connu de Ptolémée. Il fut ensuite démontré par Régiomontanus (1464) et exprimé sous la forme précédente.

LE THÉORÈME DE L'AIRE

En 1464, Régiomontanus signale la formule: $\Delta = \frac{1}{2}ab \sin C$.

En 1627, Snell la proposa sous la forme suivante: $\frac{1}{\sin A} = \frac{bc}{2\Delta}$, d'où $\Delta = \frac{bc \cdot \sin A}{2}$.

16-3304-01
5589-1320

Gouvernement du Québec
Ministère
de l'Éducation